

Exponentielle Abnahme sichtbar gemacht

A. Teichrew, Th. Wilhelm

1 Der exponentielle Zerfall

Exponentielle Prozesse treten in den verschiedensten Bereichen der Physik auf. Sei es der radioaktive Zerfall von Atomkernen, die Angleichung einer Temperatur an die Umgebung oder die Auf- und Entladung eines Kondensators. Der exponentielle Charakter dieser Prozesse ist in den Messergebnissen einer mehr oder weniger komplizierten Apparatur zu erkennen und lässt sich theoretisch begründen. Die Größen, an denen eine Veränderung ausgemacht werden soll, bleiben jedoch unsichtbar. Radioaktive Kerne, Temperaturen und Ladungen können nur indirekt dargestellt werden.

Als Analogon für den radioaktiven Zerfall ist deshalb der Bierschaumzerfall beliebt, bei dem man die Höhe der Bierschaumsäule gut sieht und deren Abnahme beobachten kann. Häufig wird sogar im Mathematikunterricht die e-Funktion damit eingeführt. Allerdings ist der Bierschaumzerfall nicht exponentiell, sondern näherungsweise eine Überlagerung zweier e-Funktionen (biexponentielle Verlauf) [1]. Das Nach-Unten-Fließen des Bieres zwischen den Schaumbläschen, also das Entwässern des Schaumes, führt zu einer schnellen Abnahme der Schaumhöhe, die vor allem am Anfang relevant ist, und die Blasenvergrößerung und das Platzen der Blasen führt zu einer langsamen Abnahme, die später entscheidend ist.

So stellt sich die Frage, ob es eine andere exponentiell abnehmende Größe gibt, die man auch direkt sehen kann. Die Entleerung eines mit Wasser gefüllten Zylinders über eine Kapillare ist eine solche Möglichkeit.

2 Entleerung über eine Kapillare

Wir betrachten einen mit Wasser gefüllten Standzylinder, der über eine unten angeschlossene Kapillare entleert wird. Der hydrostatische Druck in einer ruhenden Flüssigkeit hängt davon ab, wie tief man sich unterhalb der Flüssigkeitsoberfläche befindet. In einem Zylinder mit der Grundfläche A_Z ist die Druckdifferenz Δp_Z zwischen der Wasseroberfläche und dem Boden des Zylinders proportional zur Höhe h der Wassersäule der Dichte ρ und damit proportional zum Volumen V der Wassersäule:

$$|\Delta p_Z| = \rho g h = \frac{\rho g}{A_Z} \cdot V \quad \{1\}.$$

Eine Kapillare ist nur ein dünnes Rohr. Allgemein gilt für gerade Rohrleitungen die Darcy-Weisbach-Gleichung. Sie beschreibt den Druckverlust durch die Rohrreibung Δp_K als Differenz zwischen Eingangs- und Ausgangsdruck eines Rohres:

$$|\Delta p_K| = \lambda \cdot \frac{l}{2r} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{\dot{V}}{A_K} \right)^2 \quad \{2\}.$$

Diese Druckabnahme hängt von der Länge l , dem Innenradius r , der Querschnittsfläche A_K und der Rohrreibungszahl λ ab. Die Rohrreibungszahl λ hängt nicht nur von der Beschaffenheit des Rohres, sondern auch von der vorliegenden Strömung (Reynolds-Zahl Re) ab. Der genaue Ausdruck variiert jedoch mit der Art der Strömung [2, S. 177 ff.]. Nur für laminare Strömungen ($Re < 2300$) mit konstanter Viskosität (Newton'sche Flüssigkeit) in einer kreisrunden Kapillare gilt nach Hagen-Poiseuille:

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{\frac{2r \cdot \rho \cdot v}{\eta}} = \frac{64}{\frac{2r \cdot \rho \cdot |\dot{V}|}{\eta \cdot A_K}} = \frac{64 \cdot \eta \cdot A_K}{2r \cdot \rho \cdot |\dot{V}|} ,$$

wobei $v = |\dot{V}|/A_K$ der Betrag der Strömungsgeschwindigkeit ist.

λ oben in {2} eingesetzt ergibt:

$$|\Delta p_K| = \frac{8 \cdot \eta \cdot l}{A_K \cdot r^2} \cdot \dot{V} = \frac{8 \cdot \eta \cdot l}{\pi \cdot r^4} \cdot \dot{V} .$$

Das ist das Gesetz von Hagen-Poiseuille für eine laminare Strömung. Für uns ist nur entscheidend, dass der Volumenstrom \dot{V} proportional zur Druckdifferenz Δp_K in der Kapillare ist.

Da sowohl an der Wasseroberfläche der Wassersäule im Zylinder als auch an der Austrittsöffnung am Ende der Kapillare der gleiche Luftdruck herrscht, sind die Druckdifferenzen in der Wassersäule und in der Kapillare vom gleichen Betrag. Aus $|\Delta p_K| = |\Delta p_Z|$ folgt (mit dem richtigen Vorzeichen):

$$\frac{8 \cdot \eta \cdot l}{A_K \cdot r^2} \cdot \dot{V} = -\frac{\rho g}{A_Z} V .$$

Kurz:

$$\dot{V} \sim -V ,$$

d.h. die Volumenänderung ist proportional zum vorhandenen Volumen.

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist die bekannte natürliche Exponentialfunktion:

$$V(t) = V_0 \cdot e^{-c \cdot t}$$

mit V_0 als Startwert zum Zeitpunkt $t = 0$.

Die Parallele zwischen einerseits der Entladung eines Kondensators über einen Ohm'schen Widerstand und andererseits dem Entleeren des Zylinders über eine Kapillare zeigen Tabelle 1 und Abbildung 1.

Geladener Kondensator	Gefüllter Zylinder
Ladung Q	Wassermenge V
Stromstärke $I = \dot{Q}$	Volumenstrom \dot{V}
Spannung U (= Potentialdifferenz $\Delta\varphi$)	Druckdifferenz Δp
Spannung am Kondensator U_C	Hydrostatischer Druck im Zylinder Δp_Z (Pascal'sches Gesetz)
Ohm'sches Gesetz zur Verknüpfung von Spannung U_R und Strom am Widerstand	Gesetz von Hagen-Poiseuille zur Verknüpfung von Druckdifferenz Δp_K und Volumenstrom in der Kapillare
Ohm'scher Widerstand $R = \frac{\rho \cdot l}{\pi \cdot r^2}$ mit Radius r (bei kreisförmigem Querschnitt) und Länge l eines Leiters sowie dem spezifischen Widerstand ρ .	Proportionalitätsfaktor $k = \frac{8 \cdot \eta \cdot l}{\pi \cdot r^4}$ mit Radius r und Länge l der Kapillare sowie der dynamischen Viskosität der strömenden Flüssigkeit η .
$U_C = \frac{Q}{C}$ und $U_R = R \cdot \dot{Q}$	$\Delta p_Z = \rho g \cdot \frac{V}{A_Z}$ und $\Delta p_K = k \cdot \dot{V}$
Für alle Zeiten gilt: $U_{ges} = U_C + U_R = 0$ $\Rightarrow \dot{Q} = -\frac{1}{RC} \cdot Q.$	Für alle Zeiten gilt: $\Delta p_{ges} = \Delta p_Z + \Delta p_K = 0$ $\Rightarrow \dot{V} = -\frac{\rho g}{k A_Z} \cdot V.$

Tab. 1: Auflistung der Zusammenhänge, die zu einem vergleichbaren Prozess führen

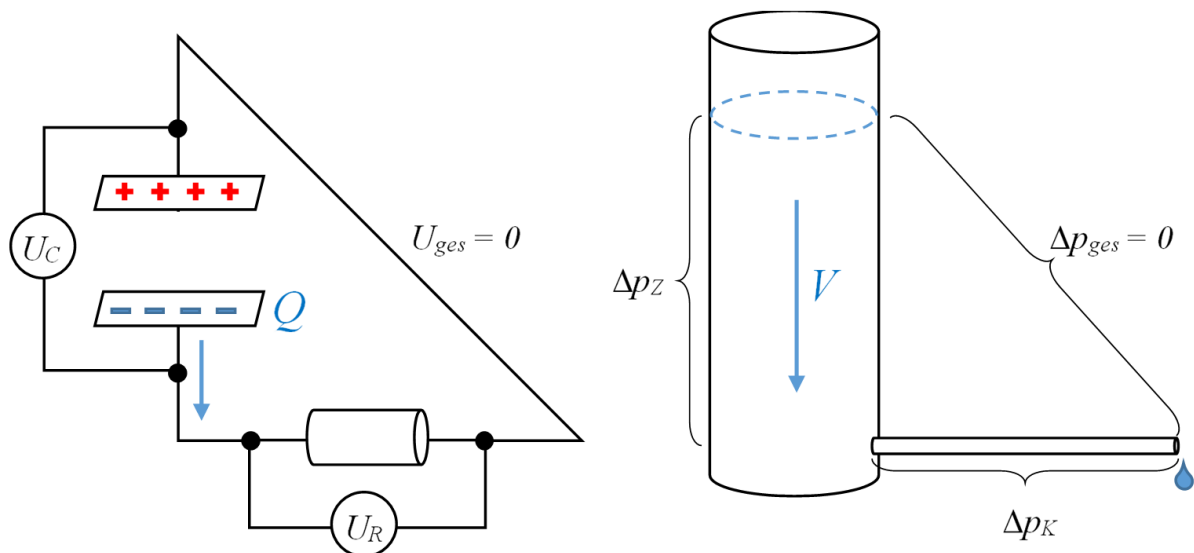


Abb. 1: Analogie der Kondensatorentladung und der Zylinderentleerung

3 Entleerung über größere Öffnungen

Lässt man das Wasser durch ein dickeres Rohr fließen, evtl. mit einem verstellbaren Ausflusshahn, gibt es eine turbulente Strömung ($Re > 2300$). Auch hier gilt $|\Delta p_R| = |\Delta p_Z|$, woraus folgt:

$$\lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{\dot{V}}{A_R} \right)^2 = \frac{\rho g}{A_Z} \cdot V$$

$$\Rightarrow \dot{V} \sim \sqrt{cV} ,$$

wobei der letzte Ausdruck nur für den Fall gilt, dass λ für die vorhandenen Ströme \dot{V} nahezu konstant bleibt, also nur schwach mit den gegebenen Reynolds-Zahlen variiert. Eine quadratische Funktion $V(t) = a^2 \cdot (t - b)^2$ erfüllt diese Differenzialgleichung.

Bekannter ist die Ausflussformel nach dem Gesetz von Torricelli für den Ausfluss aus einem Behälter ohne ein Rohr. Ohne Energieverluste durch Reibung folgt aus dem Energiesatz

$$v = \sqrt{2gh} .$$

Da die mittlere Fließgeschwindigkeit proportional zur Volumenänderung ist und die Höhe proportional zum verbleibenden Volumen ist folgt auch hier

$$\Rightarrow \dot{V} \sim \sqrt{cV} .$$

4 Das Experiment

4.1 Vorbereitung

Der Versuchsaufbau besteht aus einem mit Wasser gefüllten Stehzyylinder mit möglichst kleiner Querschnittsfläche (Innendurchmesser 6,4 cm) und mit seitlicher Öffnung am unteren Ende. Die Öffnung wird mit einem Stopfen mit einer Glaskapillare verschlossen. Unterhalb des Aufbaus befindet sich ein Auffangbecken für das ausfließende Wasser. Auf der Wasseroberfläche schwimmt ein Würfel aus Styropor, der den Wasserstand anzeigt und für eine automatische Videoanalyse gebraucht wird. Für eine manuelle Videoanalyse ist dies nicht nötig, da der Meniskus der Wasseroberfläche gut zu sehen ist.

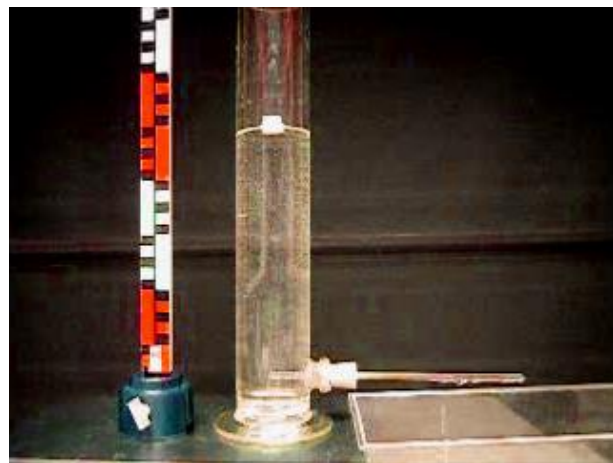


Abb. 2: Versuchsaufbau (Startbild des Videos, Auflösung nur 320x240 Pixel)

Der Ausschnitt in Abbildung 2 wurde von einer Kamera auf einem Stativ erfasst und über einen längeren Zeitraum gefilmt, wobei die geringstmögliche Zeitauflösung einzustellen ist (meist 29,97 fps). Die Pixelauflösung muss auch nicht hoch sein (hier verwendet: nur 320x240 Pixel). Der dunkle Hintergrund sorgt für einen guten Kontrast mit dem Styroporwürfel, was die Analyse erleichtert. Dieser weiße Punkt wird in der Videoanalysesoftware *measure dynamics* bei einer automatischen Analyse sicher erkannt.

Die Software kann in der aktuellen Version beliebig lange Videos verarbeiten; jedoch wird bei sehr langen Videos der PC deutlich langsamer. Das hier verwendete Video war ca. 36 Minuten lang, was bei 29,97 fps eine große Anzahl von ca. 65.500 Bildern liefert. Für die hier vorgestellte Analyse genügt allerdings die Analyse von ca. 20 bis 25 Einzelbildern, so dass man eine Schrittweite von 2.500 bzw. 3.000 einstellen kann.

Möchte man keine so großen Videodateien, kann man das Video auch in measure dynamics exportieren, wobei nur jeder n -te Frame (= Bild) verwendet wird, wenn eine Schrittweite n eingestellt ist. Dann kann man das Originalvideo löschen. Ein Zeitraffer-Video mit nur jedem 400-ten Frame steht unter [3] zur Verfügung. Damit dies wieder in Originalgeschwindigkeit abläuft, ist eine Framezahl von 0,0749 fps in das Videoanalyseprogramm einzugeben.

Ein Lineal im Tonnenfuß dient als Maßstab für die Skalierung bei der Videoanalyse. Vor der Erfassung der Messwerte sollte man den Ursprung des Koordinatensystems (Nullniveau) auf die Ausflusshöhe der Kapillare einstellen. Bei einem guten Videoanalyseprogramm ist die Skalierung und der Ursprung aber auch noch nach der Analyse möglich und die Daten werden entsprechend geändert.

4.2 Auswertung

Zunächst sollte man das Video schnell abspielen, indem man eine größere Schrittweite einstellt (Beispiel unter [3]), so dass der an sich sehr langsamen Prozess schnell abläuft und man auch die Veränderung des Ablauftempos wahrnimmt. Dazu betrachtet man das Video am besten mehrmals.

Außerdem können Serienbilder wie in Abbildung 3 erzeugt werden. Der weiße Styroporwürfel hebt sich hier gut vom Hintergrund ab. Lädt man ein solches Bild in GeoGebra, kann man mit Schiebereglern eine Exponentialkurve an das Streifenbild anpassen und so den exponentiellen Verlauf überprüfen.

Nach einer Videoanalyse liegen schließlich Messwerte für die Höhe zu verschiedenen Zeiten vor. Abbildung 4 zeigt die Höhe der Wassersäule in Abhängigkeit von der Zeit (manuelle Analyse mit Schrittweite 400). Aufgrund der geringen Videoauflösung ändert sich die Höhe von Frame zu Frame nur um ein oder zwei Pixel oder gar nicht, was sich in gewissen Stufen zeigt.

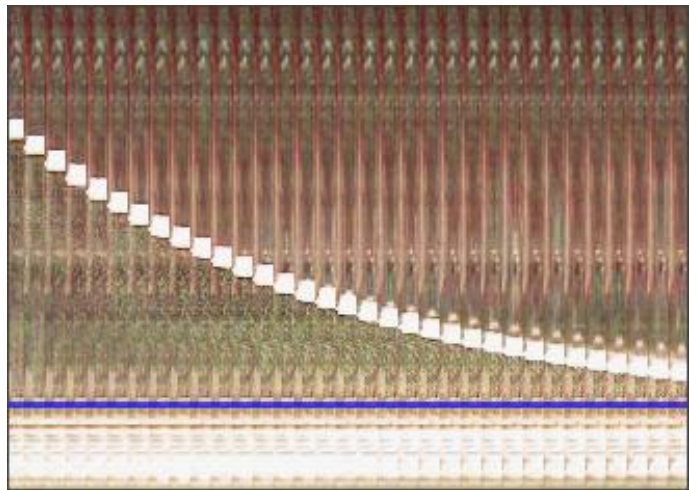


Abb. 3: Mit measure dynamics erzeugtes Serienbild, wobei die blaue Linie die Ausflusshöhe darstellt (Schrittweite 2.000, $\Delta t = 66,7$ s, 33 Streifen)

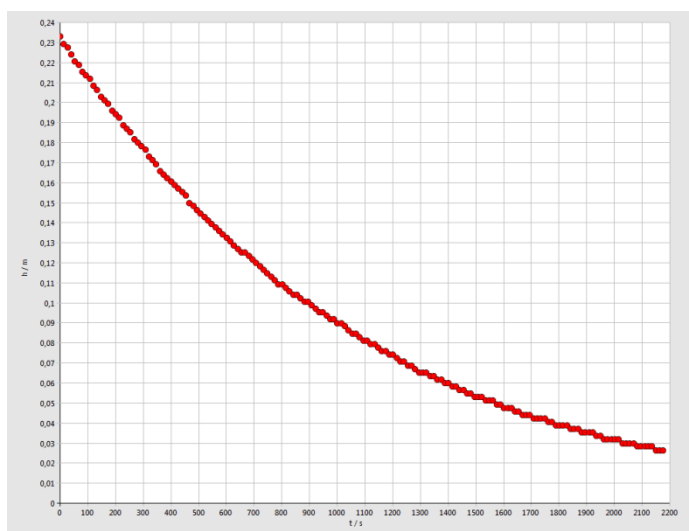


Abb. 4: $h(t)$ -Diagramm (Schrittweite 400, 164 Messpunkte alle 13,3 Sekunden)

In measure dynamics können auch Funktionen eingezeichnet werden. Wenn man die Parameter der e-Funktion noch nicht kennt, kann man Parameter definieren und diese mit Hilfe von Schiebern so lange verändern, bis die Funktion gut zu den Messwerten passt [4, S. 58 ff.]. In Abbildung 5 findet man eine exponentielle Fitfunktion (blau) zu den Messwerten (rot). Obwohl die Messwerte aufgrund einer automatischen Messwernerfassung nicht so genau wie bei einer sorgfältigen manuellen Analyse sind, passt die Fitfunktion gut zu den Messwerten.

Alternativ können die Messdaten auch in Excel geöffnet werden und eine exponentielle Fitfunktion mit Excel bestimmt werden, wobei auch ein Bestimmtheitsmaß von $R^2 = 0,9997$ berechnet wird. In Excel ist auch eine halblogarithmische Darstellung wie in Abbildung 6 möglich, in der eine Gerade zu erkennen ist. Ein quadratischer Fit passt dagegen nicht gut zu den Messwerten. Außerdem steigt in der quadratischen Fitkurve ab ungefähr $t = 2.100$ s (Minimum) die Höhe wieder an, was physikalisch unsinnig ist.

Die experimentell gefundene Zerfallskonstante $c = -1/1027$ s = $-1/\tau$ (bzw. die Lebensdauer τ) in der e-Funktion soll hier noch mit dem theoretischen Wert verglichen werden, wobei für den unbekanntes Durchmesser der Kapillare Werte im Bereich von 1,2 mm angenommen werden:

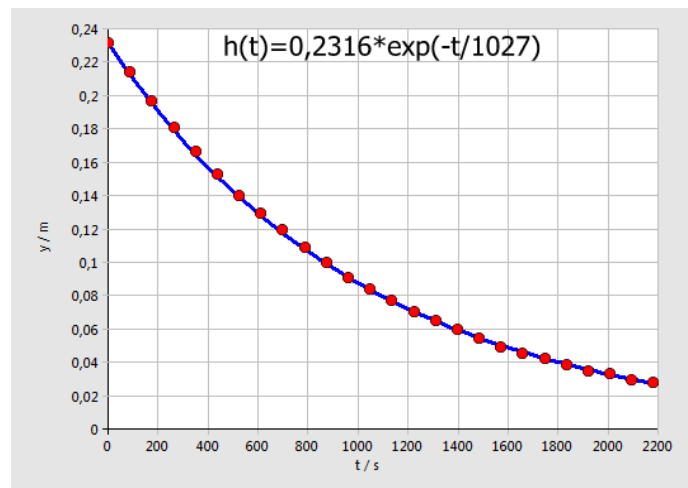


Abb. 5: $h(t)$ -Diagramm mit exponentieller Fitkurve (Schrittweite 2.616, 26 Messpunkte alle 87,3 Sekunden, automatische Analyse)

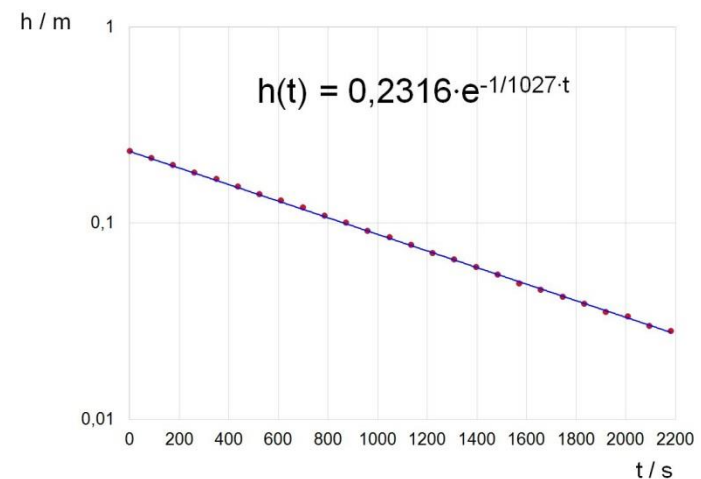


Abb. 6: Messwerte und exponentielle Fitfunktion in halblogarithmischer Darstellung (Messpunkte alle 87,3 Sekunden)

$$c = -\frac{\rho \cdot g \cdot r_K^4}{r_Z^2 \cdot 8 \cdot \eta \cdot l_K} \approx -\frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot r_K^4}{(0,03 \text{ m})^2 \cdot 8 \cdot 0,001 \frac{\text{kg} \cdot \text{s}}{\text{m}} \cdot 0,23 \text{ m}}$$

$$\approx \begin{cases} -\frac{1}{1845 \text{ s}} & \text{für } r_K = 0,00055 \text{ m} \\ -\frac{1}{1303 \text{ s}} & \text{für } r_K = 0,00060 \text{ m} \\ -\frac{1}{946 \text{ s}} & \text{für } r_K = 0,00065 \text{ m} \end{cases} .$$

In Abbildung 7 sind die Kurven für die berechneten Werte farblich dargestellt. Es wird deutlich, dass der Verlauf des Ausfließvorgangs stark von dem Durchmesser der Kapillare abhängt. Ein Durchmesser von 1,3 mm passt am besten zu den experimentell ermittelten Werten.

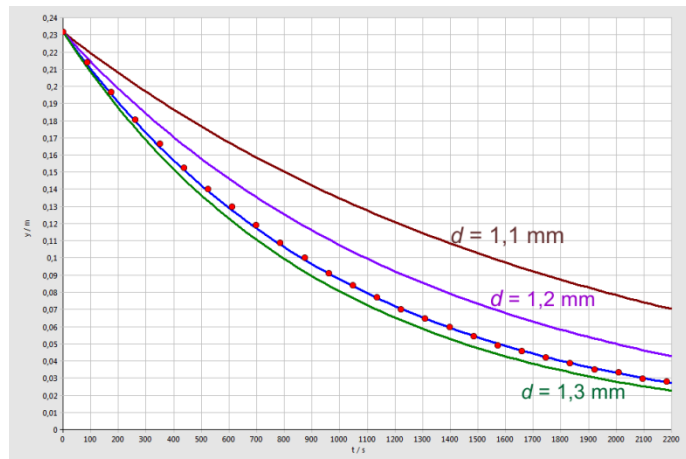


Abb.7: Messkurve (blau) mit Messwerten (rot) und drei berechnete Kurven für Kapillaren mit unterschiedlichem Durchmesser

4.3 Ausfluss über ein dickeres Rohr

Der nachgewiesene exponentielle Zusammenhang gilt allerdings nicht für beliebig große Öffnungen, denn das Gesetz von Hagen-Poiseuille hat das Fehlen von turbulenten Strömungen als Voraussetzung. Die Konsequenzen der Nichtbeachtung werden in der folgenden Abwandlung kurz vorgestellt.

Anstelle einer Kapillare wurde ein Auslaufrohr mit einem Durchmesser von ca. 2,5 mm verwendet. Der Hahn wurde während des achtminütigen Ausfließvorgangs in halb geöffneten Position belassen. Eine exponentielle Fitkurve an alle Messwerte zeigt im Gegensatz zum obigen Versuch systematische Abweichungen. Die Messwerte liegen im ersten Fünftel der Messzeit unter und in den nächsten zwei Fünftel über der Fitkurve. Ein quadratischer Fit an

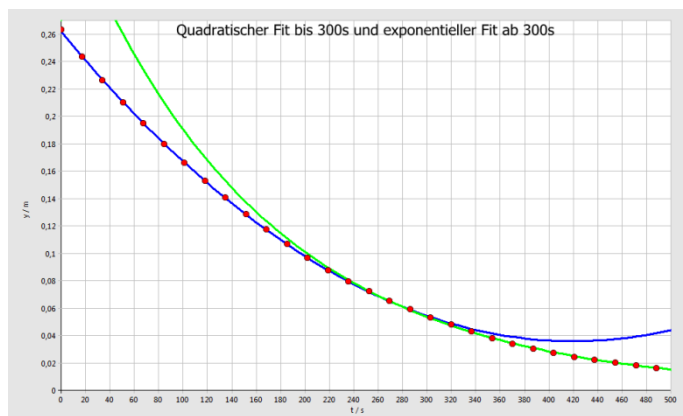


Abb. 8: $h(t)$ -Diagramm beim Ausfluss über einen Hahn: Messwerte rot (Videoauflösung 640x360Pixel, 30 Messpunkte alle 16,8 Sekunden), quadratischer Fit blau, exponentieller Fit grün

alle Messwerte liefert ein wesentlich besseres Ergebnis. Erst für ganz große Zeiten passt die Fitkurve nicht optimal zu den Messwerten und ab ungefähr $t = 470$ s (Minimum) steigt die Fitkurve wieder unphysikalisch an.

Man könnte vermuten, dass bis zu einem bestimmten Volumenstrom \dot{V} Turbulenzen in dem Auslaufhahn vorkommen und erst bei einer niedrigen Strömungsgeschwindigkeit die Annahme einer laminaren Strömung vertretbar ist. Abbildung 8 zeigt eine quadratische Fitkurve, die für die Messwerte bis $t = 300$ s berechnet wurde, und eine exponentielle Fitkurve, die für die Messwerte ab $t = 300$ s berechnet wurde. So erhält man einen idealen Fit. Dieser Versuch zeigt, dass eine dickere Rohrleitung mit einem Hahn zwar zu einem schnelleren Ablauf führt, aber nur in der Endphase mit einer Exponentialkurve beschrieben werden kann.

5 Fazit

Es konnte sowohl theoretisch als auch experimentell gezeigt werden, dass die Entleerung eines Zylinders über eine Kapillare ein exponentieller Vorgang ist. Eine mögliche Fehlerquelle sind dabei Rohre mit zu dicker Ausflussöffnung. Die visuellen Vorteile dieses Versuches bieten im Unterricht vielfältige Möglichkeiten: als Analogie für den radioaktiven Zerfall, für die Kondensatorentladung in der Oberstufe oder als Kontext bei der Behandlung der natürlichen Exponentialfunktion im Mathematikunterricht. So ist es eine Alternative für den beliebten Bierschaumzerfall, der von sehr vielen Faktoren abhängt und nicht so gut exponentiell ist.

Anhand der Videos und Serienbilder lassen sich die Zusammenhänge in einem exponentiellen Prozess direkt untersuchen, ohne bereits zu Beginn ein umfangreiches mathematisches Wissen zur Exponentialfunktion zu benötigen. Sie lässt sich beispielsweise als diejenige definieren, die Prozesse beschreibt, in denen die Änderungsrate $\Delta h/\Delta t$ vom Bestand h abhängt. Das kann in den Serienbildern an vielen Stellen durch einfaches Ausmessen überprüft werden. Der Quotient aus der Abnahmegeschwindigkeit und dem Wasserstand bleibt ungefähr gleich.

Insgesamt liegt also ein einfacher Versuch zu einem exponentiellen Zerfall vor, bei dem die abnehmende Größe gut sichtbar ist. Ein Nachteil ist nur die längere Versuchsdauer, was durch Zeitraffervideos behoben werden kann.

Literaturverzeichnis

[1] Wilhelm, T.; Ossau, W.: Bierschaumzerfall – Modelle und Realität im Vergleich, Praxis der Naturwissenschaften – Physik in der Schule 58, Nr. 8, 2009, S. 19 - 26

[2] Herz, R.: Grundlagen der Rohrleitungs- und Apparatechnik, 2. Auflage, Vulkan-Verlag GmbH Essen, 2004

[3] www.thomas-wilhelm.net/exponentiell.avi

[4] Sauer, M.: measure Dynamics. Das Tutorial, Staatsexamensarbeit Universität Würzburg, <http://www.thomas-wilhelm.net/arbeiten/Tutorial.pdf>

Anschriften der Verfasser

Albert Teichrew, Prof. Dr. Thomas Wilhelm, Institut für Didaktik der Physik, Goethe-Universität Frankfurt am Main, Max-von-Laue-Str. 1, 60438 Frankfurt am Main, ateichrew@gmail.com, wilhelm@physik.uni-frankfurt.de, www.thomas-wilhelm.net

Stichworte

Zerfall, Exponentialfunktion, Videoanalyse, Analogieexperiment, Kondensator

Kurzfassung

Exponentielle Prozesse treten in den verschiedensten Bereichen der Physik auf und man wünscht sich Versuche, bei denen die exponentiell abnehmende Größe direkt sichtbar ist. Die Entleerung eines mit Wasser gefüllten Zylinders über eine Kapillare ist eine solche Möglichkeit. Im ersten Teil wird theoretisch gezeigt, dass die Volumenänderung einer Wassersäule nur proportional zum vorhandenen Volumen ist, wenn das Wasser durch eine kreisrunde Kapillare fließt. Dann nimmt das Volumen exponentiell ab. Bei größeren Öffnungen nimmt das Volumen dagegen quadratisch mit der Zeit ab. Im zweiten Teil werden ein Experiment und seine Auswertung mit der Videoanalyse gezeigt und nachgewiesen, dass es sich beim Auslaufen durch eine Kapillare sehr gut um eine exponentielle Abnahme handelt. Außerdem wird gezeigt, dass dies nicht mehr gilt, wenn ein dickeres Rohr mit einem Hahn verwendet wird.