



GPS im Physikunterricht

1. Begründung des Themas

- Hoher Bekanntheitsgrads durch vielfältige Anwendungen im Alltag:
 - Navigationsgeräte für Autos
 - Orientierung mittels GPS bei Outdooraktivitäten (z.B. Geocaching)
 - Notfallfunktion in Handys
 - erschwingliche Preise
 - hohe Zuverlässigkeit
- Verringerung der Kluft zwischen Realität und Unterricht (Physik im Kontext dieser Technik)
- DPG fordert in Thesenpapier für neues Lehramtsstudium weniger detailreiches Einzelwissen, sondern übergreifende Themen und nennt als Beispiel GPS.

2. Physikalisch-technische Funktionsprinzip

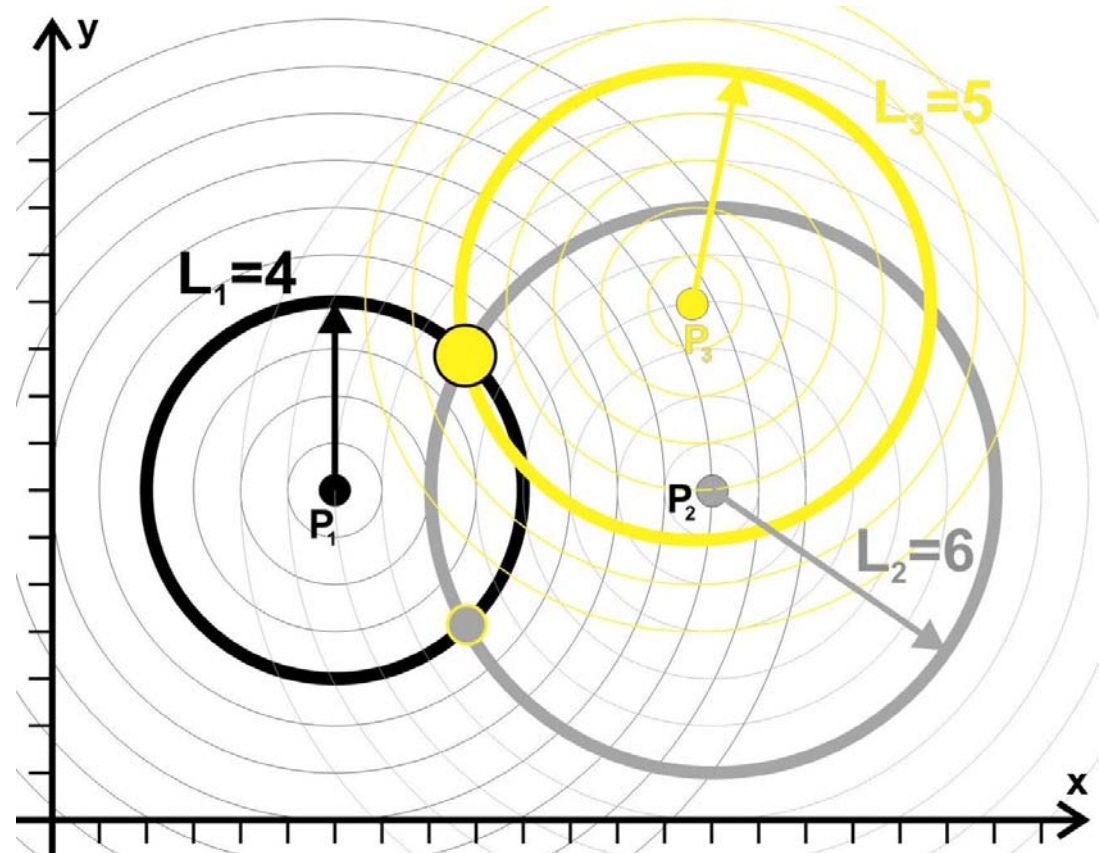
- Viele interessante Aspekte, wie z.B. die Informationsübertragung mittels elektromagnetischer Wellen, Ausbreitungserscheinungen elektromagnetischer Wellen, Genauigkeit und genauigkeitsbeeinflussende Faktoren, Koordinatensysteme und Kartographie.
- Drei Segmente:
 - Kontrollsegment: Bodenstationen. Weltweit so verteilt, dass jeder Satellit pro Umlauf mindestens von zwei Daten empfangen kann. Hauptaufgaben: Überwachung der Flugbahnen der Satelliten und Generierung der Navigationsnachricht.
 - Weltraumsegment: ca. 24 Satelliten in sechs Umlaufbahnen. So weltweite Überdeckung mit möglichst wenig Satelliten. Umlaufbahnen im Mittel 20.230 km über der Erdoberfläche. Satellit benötigt ca. 11h 58 Min für eine Erdumrundung. Großer Sichtbarkeitsbereich.
 - Nutzersegment: alle GPS-Empfänger (Auto-, Schifffahrts-, Luftfahrtsnavigationsempfänger oder Outdoorgeräte)

2.1 Die Standortbestimmung

- Wichtigste Funktion von GPS: Standortbestimmung
- Satelliten als Bezugspunkte
- Voraussetzung: Bestehen einer quasioptischen Sichtverbindung zwischen Empfänger und Satelliten
- Trilateration (nicht Triangulierung):
 - drei Signale werden von drei Quellen bekannter Koordinaten empfangen und ausgewertet
 - Entfernungen zu Satelliten über die Signallaufzeiten zwischen Sender und Empfänger bestimmt

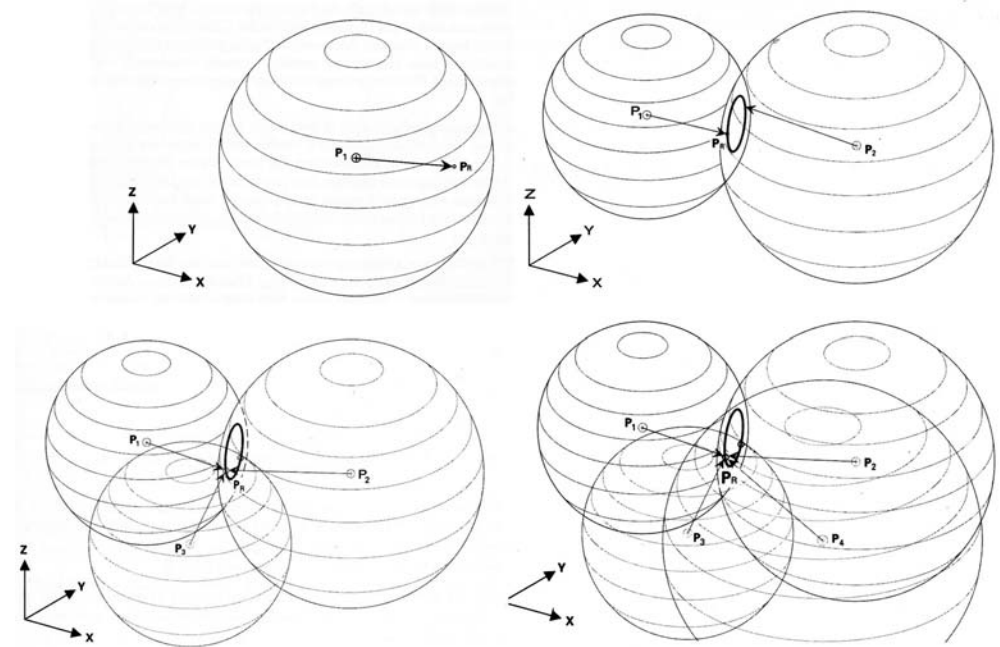
2.1 Die Standortbestimmung

- In der Ebene:
 - zwei Kreise haben keinen, einen oder zwei Schnittpunkte
 - Abbildung: Standort vier Einheiten vom Bezugspunkt P_1 , sechs Einheiten vom Bezugspunkt P_2 entfernt. Kreise schneiden sich in zwei Punkten. Eindeutig mit drittem Bezugspunkt P_3 .



2.1 Die Standortbestimmung

- Im Raum: Kugeln statt Kreises
- Im Raum bei drei Bezugspunkten keine Eindeutigkeit
- Entweder aufgrund des Erdmodells einen Punkte ausschließen (z.B. im Erdinneren) oder weiterer Bezugspunkt
- Beim ersten Modus Anzeige „2D“ (keine Höhenaussagen möglich), beim zweiten Modus Anzeige „3D“ Modus (Multilateration)

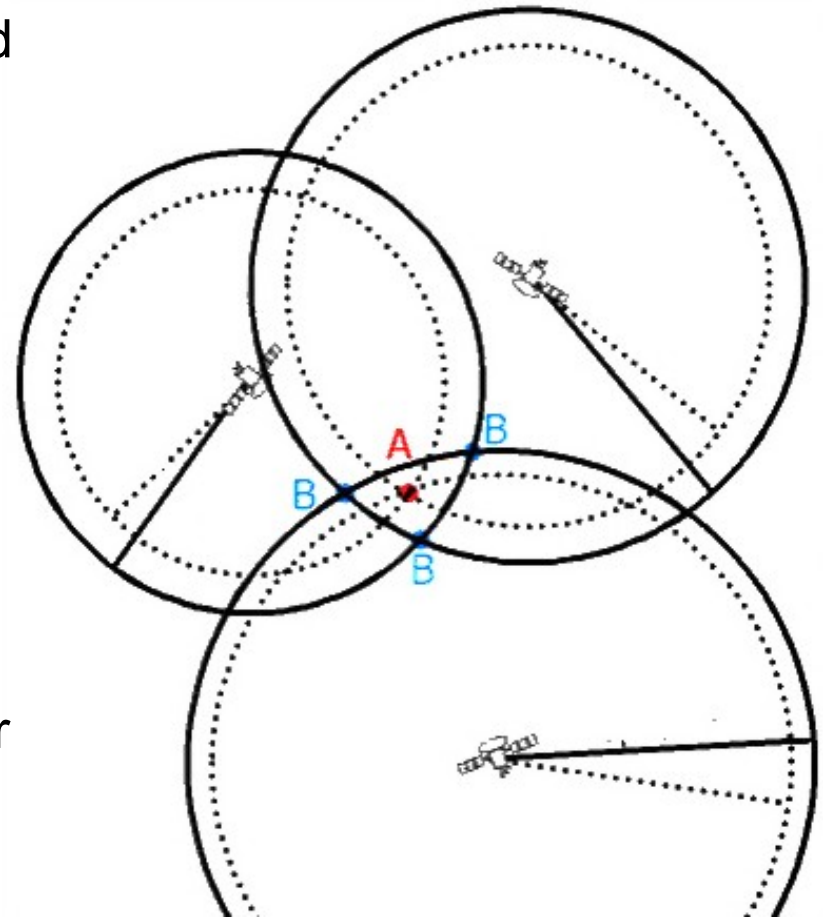


2.1 Die Standortbestimmung

- Entfernung zu Satelliten aus Signallaufzeit des vom jeweiligen Satelliten ausgesendeten Signals
- Nur die Satelliten senden Signale (Einwegentfernungsmessung).
- Bedingung: Uhren der Satelliten und die des Empfängers sehr genau aufeinander abgestimmt
- Jeder Satellit ist mit mehreren Atomuhren ausgestattet.
- Uhren werden von den Bodenstationen überwacht.
- Atomuhr auch im Empfänger?
- Empfängeruhr wird auf die Satellitenuhren bzw. GPS-Systemzeit synchronisiert.

2.1 Die Standortbestimmung

- Darstellung in der Ebene:
 - Ohne Synchronisation: Unterschied zwischen der Empfängeruhr und den Satellitenuhren.
 - Folge: Kreise, die sich nicht im gesuchten Standort A schneiden.
 - drei mögliche, verschiedene Schnittpunkte B
 - Lösung: Verschieben der Uhrzeit im Empfänger, bis die drei Schnittpunkte B zusammenfallen
 - Somit läuft Quarzuhr im Empfänger synchron zu den Atomuhren der Satelliten.



2.1 Die Standortbestimmung

- Im Raum: vier Satelliten nötig
- Statt Kreislinien Kugeln
- keine Schnittpunkte, sondern Schnittlinien (Pyramide mit gewölbten Seitenflächen)
- Synchronisation analog zur Vorgehensweise in der Ebene.
- Somit stellt das GPS-System zusätzlich ein sehr genaues und stabiles Zeitmaß zur Verfügung.
- Keine geostationäre Satelliten! Notwendig ist, dem Empfänger die Position des Satelliten mitzuteilen!!
- Vom Satelliten gesendeter Code wird der Navigationsnachricht aufmoduliert.

2.2 Spezielle Relativitätstheorie

- Relativistische Effekte müssen für die notwendige Genauigkeit berücksichtigt werden!
- Spezielle Relativitätstheorie: u.a. Zusammenhänge zwischen zwei relativ zueinander bewegten Inertialsystemen
- Vereinfacht: Erdbeobachter und Satellit bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander.
- Eigentlich ändert Satellit ständig seine Richtung (erst diese Beschleunigungen der Richtungsänderungen führen wie beim Zwillingsparadoxon dazu, dass man sogar dann ein Nachgehen der Satellitenuhren feststellen würde, wenn man diese wieder auf die Erde holt).

2.2 Spezielle Relativitätstheorie

- Beobachter auf der Erde sieht die relativ zu ihm bewegten Satellitenuhren langsamer laufen als seine eigene (umgekehrt aus Sicht des Satelliten ist es nicht von Interesse).
- Bis auf der ruhenden Erduhr das Zeitintervall Δt abgelaufen ist, läuft auf der bewegten Satellitenuhr das kleinere Zeitintervall $\Delta t'$ ab: $\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ (Zeitdilatation)
- Der Erdbeobachter sieht also seine eigene Uhr schneller laufen als die Satellitenuhr. Er ordnet sich selbst ein größeres Zeitintervall Δt zu als das Zeitintervall $\Delta t'$, das im Satellit vergangen ist (er überschätzt die bewegte Satellitenuhr). Wenn auf der bewegten Satellitenuhr eine Zeiteinheit $\Delta t'$ abgelaufen ist, ist auf der ruhenden Erduhr bereits die größere Zeiteinheit Δt vergangen:
$$\Delta t = \Delta t' \cdot \left(1 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$
- Frequenz und Zeit invers miteinander verbunden: Also misst ein Beobachter auf der Erde eine kleinere Frequenz f , als die im bewegten Satelliten gemessene Frequenz f' .

2.2 Spezielle Relativitätstheorie

- Der mittlere Geschwindigkeitsbetrag v eines Satelliten ergibt sich bei einer Bahnhöhe von 20.230 km über Meereshöhe zu
$$v = \frac{2 \cdot (20230\text{km} + 6378\text{km}) \cdot \pi}{11:58h} \approx 3881 \frac{m}{s}$$
- Somit folgt $\Delta t'/\Delta t = f/f' = 0,9999999999916249$.
- Die Atomuhren an Bord der Satelliten würden von der Erde aus betrachtet nicht mit der Grundfrequenz von 10,23 GHz laufen, sondern eine Frequenz von 10,22999999991432 GHz besitzen (sie wird unterschätzt).
- Nicht mit einem einfachen Taschenrechner berechnen!

2.3 Allgemeine Relativitätstheorie

- Allgemeinen Relativitätstheorie: Berücksichtigt noch die Gravitationskräfte.
- Folgerung: Eine Uhr an einem Ort mit höherem Gravitationspotential geht langsamer als eine, die sich an einem Ort von geringerem Gravitationspotential befindet (wirkt gegen ersten Effekt). Die Uhren im Satelliten gehen also schneller als im Empfänger am Boden.
- Bei Satelliten weit über der Erdoberfläche ist das Gravitationspotential geringer. Sendet dessen Uhr in Zeitabständen $\Delta z'$ ein Signal zur Erde, wird auf der Erde die kleinere Zeitspanne gemessen: $\Delta z \approx \Delta z' / \left(1 + \frac{\Delta U}{c^2}\right)$ (ΔU die Potentialdifferenz).
- Ergebnis: Zeitabläufe der Satellitenuhr werden auf der Erdoberfläche um $5,290 \cdot 10^{-10}$ unterschätzt und die Frequenzen um denselben Faktor überschätzt.
- Für eine Grundfrequenz der Atomuhr im Satelliten von 10,23 GHz würde ein Betrachter auf der Erde eine Frequenz von 10,2300000054118 GHz beobachten.

2.3 Allgemeine Relativitätstheorie

- Zwei Effekte:
 - Unterschätzung der Frequenz der Satellitenuhr um $0,8375 \cdot 10^{-10}$, falls die Spezielle Relativitätstheorie nicht berücksichtigt wird.
 - Überschätzung der Frequenz der Satellitenuhr um $5,290 \cdot 10^{-10}$, wenn die Allgemeine Relativitätstheorie nicht berücksichtigt wird.
 - Insgesamt ergibt sich eine Überschätzung der Frequenz der Satellitenuhr um $4,45 \cdot 10^{-10}$.
- Der Effekt wird dadurch ausgeglichen, dass die Frequenz des Satelliten verringert wird.
- Auf der Erde wird die Frequenz 10,23 GHz wahrgenommen.
- Satellitenfrequenz:
 - Hier errechnet: 10,2299999**54477** GHz
 - Literaturwert $f_{\text{korr}} = 10,2299999$ **95453** GHz
- GPS-System ist ein interessantes Beispiel für die Berücksichtigung bzw. Anwendung der Speziellen und der Allgemeinen Relativitätstheorie.

2.4 Ergänzung Relativitätstheorie

- Wichtig: Zur Berechnung des Standortes muss zu jedem Zeitpunkt die genaue Position der Satelliten bekannt sein!
- Man darf nicht behaupten, dass die verwendete Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in verschiedenen Bezugssystemen entscheidend für die hohe Genauigkeit des GPS-Systems ist!
- Würden sich die Geschwindigkeiten von Satellit und Signal wie in der klassischen Mechanik vektoriell addieren, bräuchte man nur einen anderen Auswertalgorithmus. Da aber die Positionen der Satelliten zu jedem Zeitpunkt und damit auch deren Geschwindigkeiten bekannt sind, wäre das kein Problem.

2.5 Weitere Fehlerquellen

- Fehlerquelle mit der Relativitätstheorie zusammenhängend: Sagnac-Effekt durch die Erdrotation. Auswirkungen so gering und Ausgleich so schwierig, dass nicht berücksichtigt.
- Fehlerquellen beim Satelliten:
 - Satellitenposition nicht beliebig genau angegeben.
 - Konstellation der Satelliten spielt eine Rolle.
- Übermittlung der Navigationsnachricht:
 - Laufzeiten der elektromagnetischen Signale beim Durchgang durch die atmosphärischen Schichten, v.a. in der Ionosphäre und Troposphäre, beeinträchtigt (ionosphärische bzw. troposphärische Refraktion)
- Problemen in der näheren Umgebung des Empfängers:
 - Mehrwegausbreitung durch Brechung und Reflexion des Signals an den örtlichen Gegebenheiten, wie z.B. Häusern, Bergen usw. zustande.
 - hochfrequente Störquellen
- mannigfaltige Störungseinflüsse; erzielten Genauigkeiten aber eindrucksvoll

3. Fächerübergreifende Ansätze

- Viele Möglichkeiten für fächerübergreifende Projekte
- Erdkunde: Grundlagen der Kartographie und Koordinatensysteme
- Geschichte: Geschichte der Navigation und Ortung, Zusammenhang des GPS mit den Sputnik-Satelliten
- Mathematik: Positionsbestimmung, Pythagoras bei Abstandsbestimmung zweier Punkte mit bekannten Koordinaten
- Politik: GPS als Waffengrundlage
- Wirtschaft: Transport- und Verkehrswesen, Wirtschaftlichkeit des GPS

4. Messwernerfassung mittels GPS

- Im Physikunterricht Möglichkeit: GPS-Empfänger als Messgeräte
- Einfache GPS-Empfänger ab ca. 150 € käuflich erwerbbar
- Als Blackboxmessgerät verwendbar
- Verknüpfung zwischen einer realen Bewegung und der hinter dieser Bewegung stehenden Physik möglich (Bezug zwischen Alltag und physikalischer Theorie)
- GPS-Handempfänger in unterschiedlichen Ausführungen und unterschiedlichen Preiskategorien zu erwerben.
- Wichtig: Möglichkeit zur Trackaufzeichnung. Track besteht aus den Trackpunkten. Zeitpunkt und Ortskoordinaten werden gespeichert.
- Verbinden ergibt eine Bahnkurve bzw. einen Track.

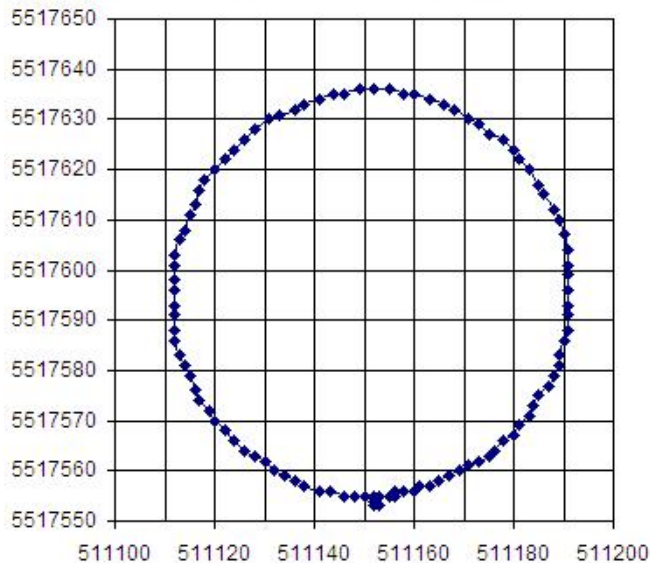
4.1 Grundlagen der Messwerverfassung

- Sinnvolle Einstellungen:
 - Aufzeichnung in gleichen kleinen Zeitintervallen
 - Intervallabstand zweier Trackpunkte von einer Sekunde
 - Kartengitter („Grid“): UTM-Koordinaten
 - metrische Einheit Meter
- Beim Laufen oder Fahren von Kreisbögen: Bahnkurven mit großem Krümmungsradius (> 20 m) verwenden
- Übertragung des Track auf PC über USB-Anschluss
- Vielzahl an kommerzieller wie auch nicht-kommerzieller Software:
 - Freeware-Software „GPS Utility“
 - Freeware-Software „G7ToWin“
 - praktisch, wenn Software neben der Liste der Trackpunkte ebenfalls eine graphische Darstellung ermöglicht.
 - Daten im txt-Format abspeichern oder nach Excel kopieren.

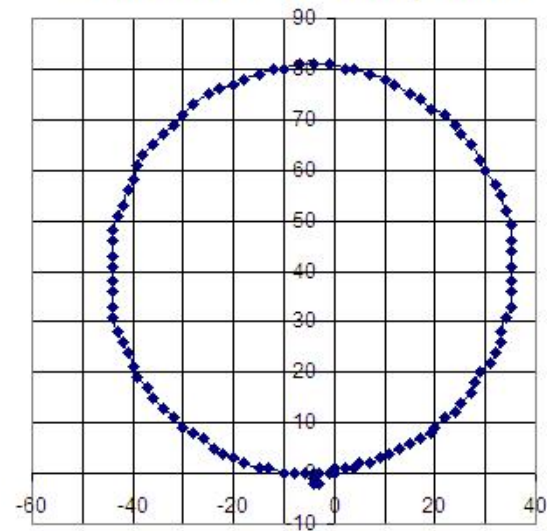
4.1 Grundlagen der Messwerverfassung

- UTM-Koordinaten: sechs- bzw. siebenstellige Ortskoordinaten
- beliebigen Datenwert als Nullpunkt wählen und alle anderen Punkte zu diesem in Bezug setzen

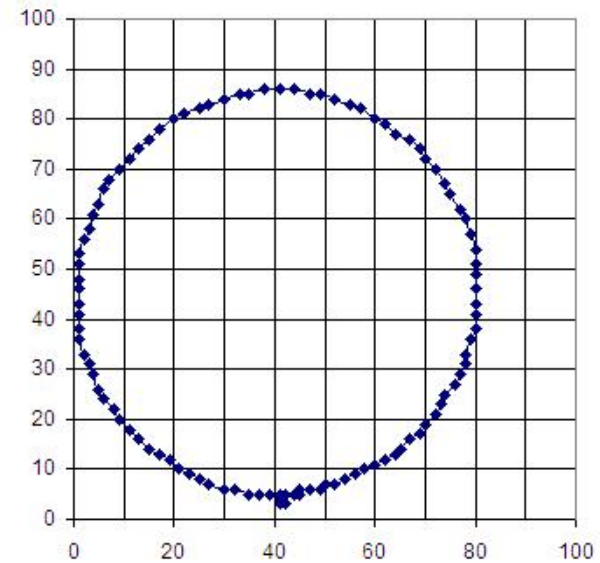
UTM- Koordinaten



Startwert als Nullpunkt

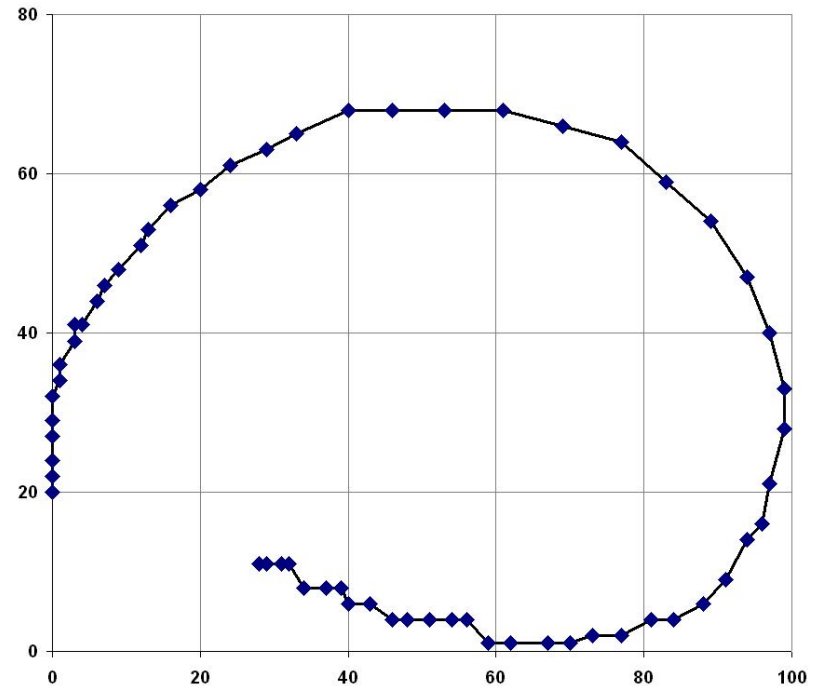


verschobener Nullpunkt



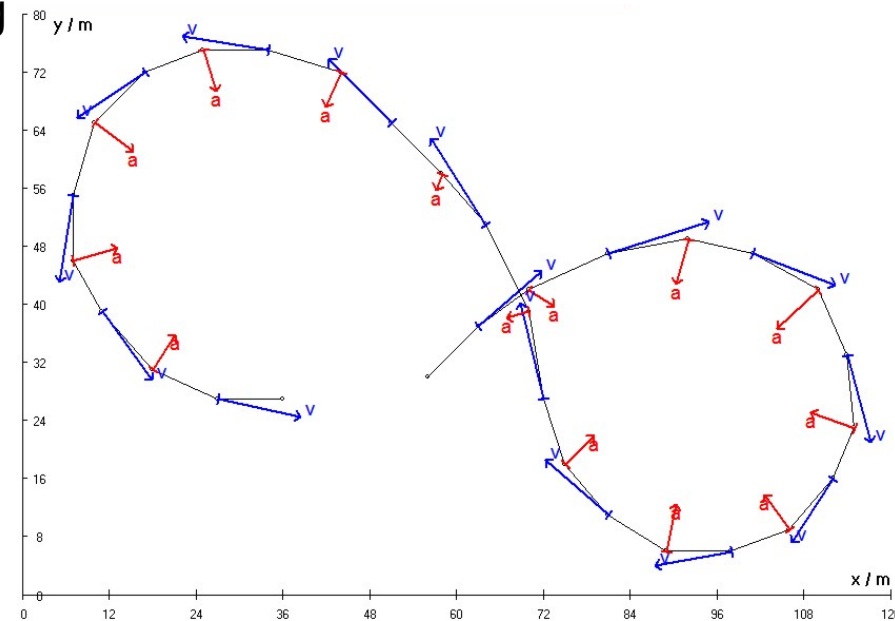
4.2 Zweidimensionale Bewegungen

- Bei Geschwindigkeit und Beschleunigung bekannte Schülerfehlvorstellungen.
- Problem im Unterricht: vektorielle Charakter der kinematischen Größen wird nicht deutlich.
- Vektoriellles Verständnis der Beschleunigung ist für ein Verständnis der newtonschen Dynamik wichtig.
- Bahnkurve mit Zeitmarken in Excel zeigt:
 - Ort ist Punkt im Bezugssystem, Weglänge ist die Länge der Bahnkurve
 - Man sieht, wo schneller und wo langsamer (Tempo)



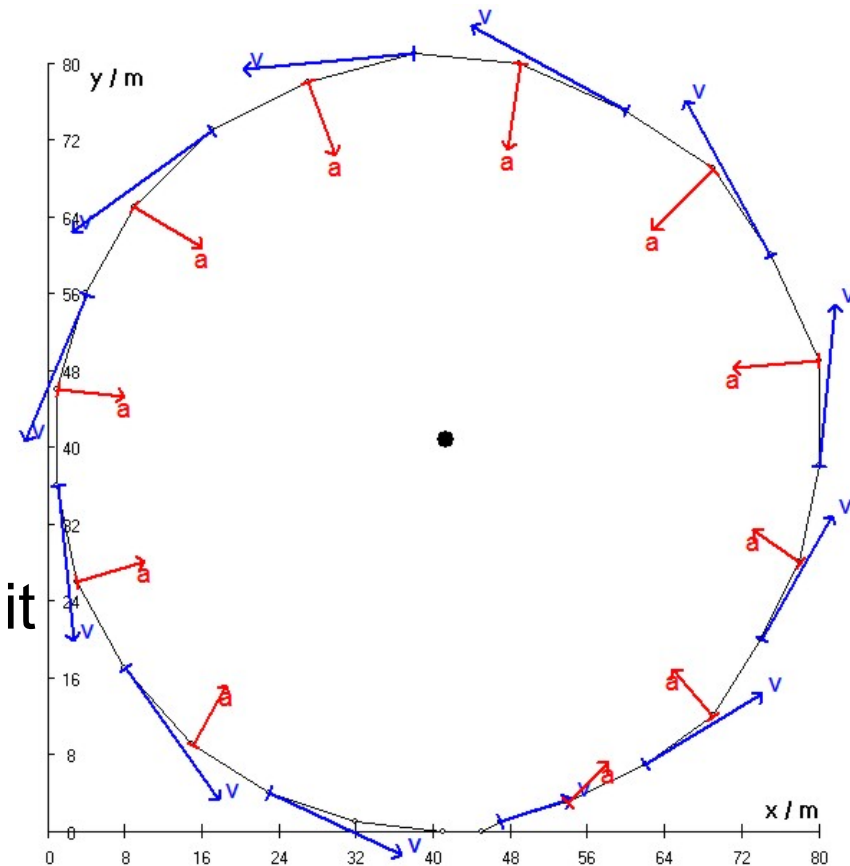
4.2 Zweidimensionale Bewegungen

- Besser: Darstellung der kinematischen Größen als Pfeile
- z.B. mit der Software PAKMA möglich
 - In Excel als csv-Datei oder txt-Datei gespeicherten Ortsdaten werden eingelesen
 - Geschwindigkeit und Beschleunigung werden dann aus den Ortsdaten errechnet
 - es genügt, jeden x-ten Messwert zu verwenden
 - je nach Wunsch Darstellung der Pfeile für den Ort, die Ortsänderung, die Geschwindigkeit, die Geschwindigkeitsänderung, die Beschleunigung oder Gesamtkraft
 - Beispiel: Bewegung, mit Fahrrad auf einem großen Parkplatz



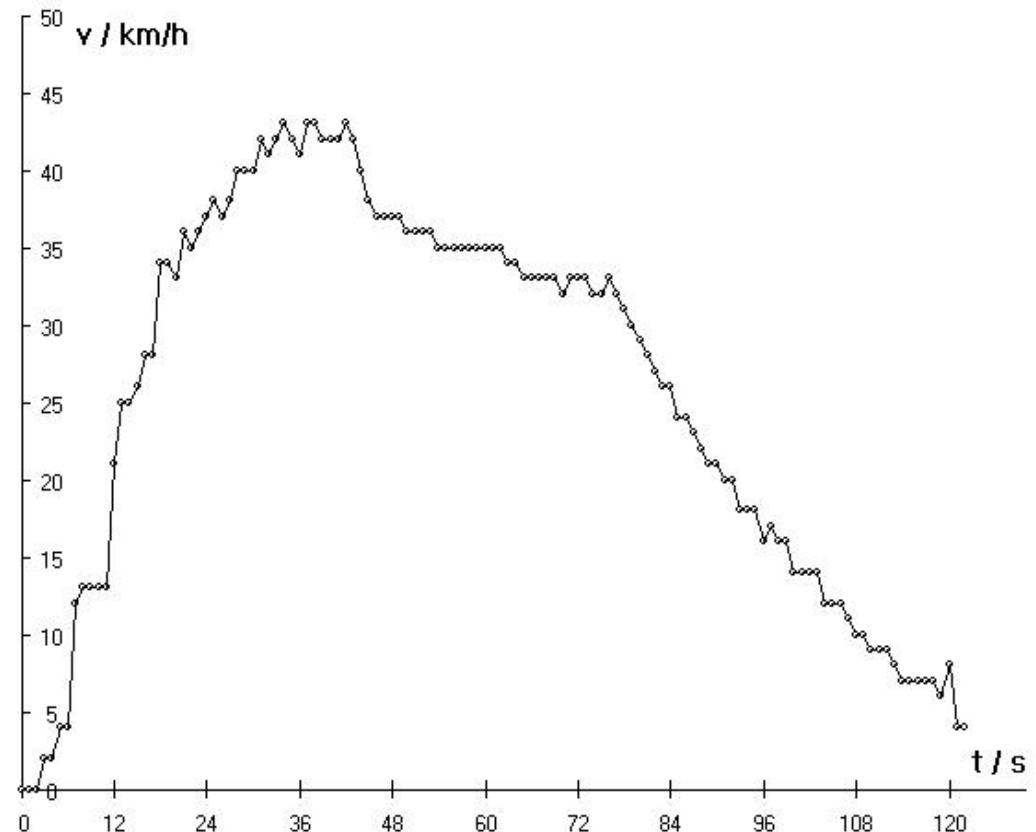
4.2 Zweidimensionale Bewegungen

- Beispiel: Kreisbewegung mit konstanter Schnelligkeit.
- Dazu auf Fußballfeld mit einem Markierungswagen Kreis um eingeschlagene Eisenstange gezogen.
- Kreis mit Fahrrad abgefahren
- Ergebnis der Kreisbewegung mit konstantem Tempo:
 - Beschleunigung von konstantem Betrag (aber nicht konstanter Richtung) zum Mittelpunkt
- verwendete Datensätze sehr einfach austauschbar.



4.3 Eindimensionale Bewegungen

- Betrachten von Weglänge und Geschwindigkeitsbetrag (= Tempo = Schnelligkeit) statt Ort und Geschwindigkeit
- Interpretieren als eindimensionale Bewegung
- Analyse und Diskussion der Alltagssituationen und der dahinter stehenden Physik.



4.3 Eindimensionale Bewegungen

- Veranschaulichung und Bestimmung von Reibung und Luftwiderstand von Fahrrad, Motorrad oder Auto mittels Ausrollkurven.
- Abnahme des Geschwindigkeitsbetrages durch Roll- und Luftwiderstand erklärbar
- Auto: Schalten in Leerlauf
- Hier: Ausrollkurve eines Autos nachts geraden, gut übersichtlichen vierspurigen Straßenabschnitt mit wenig Verkehr:
 - Ausgangsgeschwindigkeit 140 km/h
 - Minimalgeschwindigkeit von etwa 30 km/h
 - Verwendung des vom Gerät ermittelten Geschwindigkeitsbetrages (genauer als Ermittlung aus Positionsdaten)

4.3 Eindimensionale Bewegungen

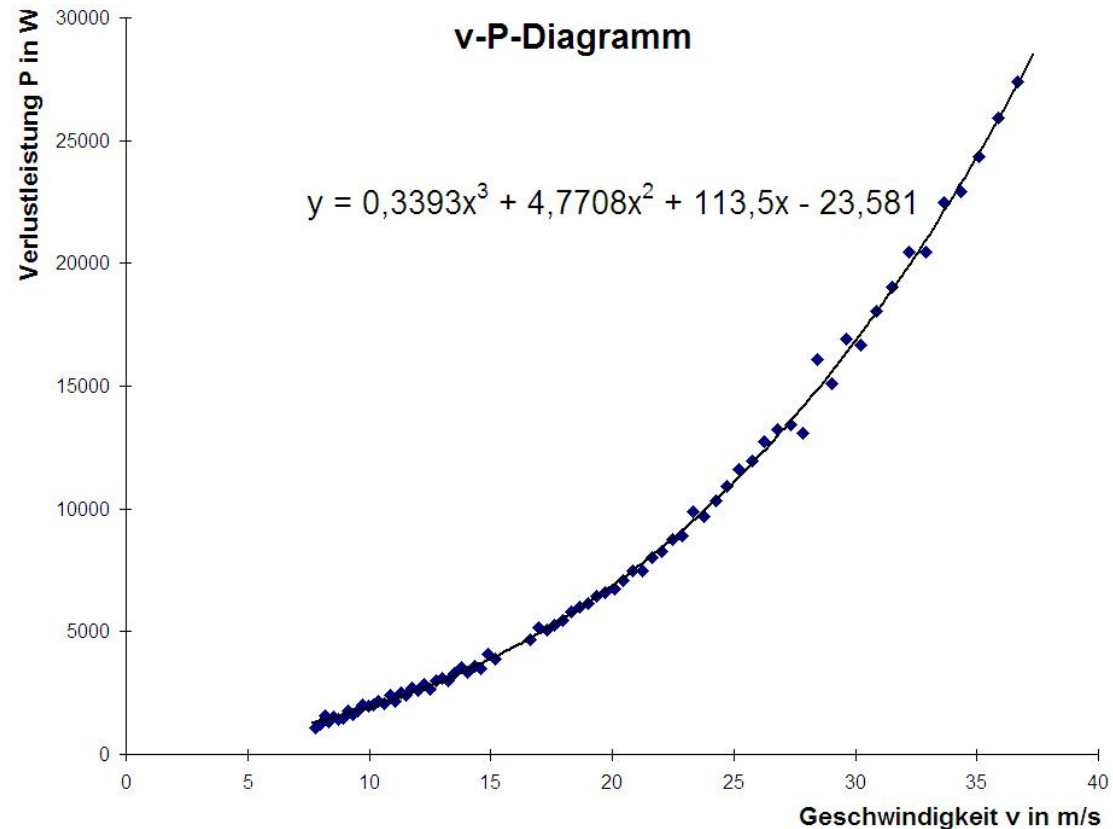
- Für kinetische Verlustleistung gilt:

$$P = (F_{Luft} + F_{Roll}) \cdot v$$

$$P = \frac{1}{2} c_W \cdot \rho \cdot A \cdot v^3 + F_{Roll} \cdot v$$

- Excel ermittelt Ausgleichskurve der Form:

$$P = a \cdot v^3 + b \cdot v$$



4.3 Eindimensionale Bewegungen

- Vereinfachung: quadratischen und konstanten Anteil vernachlässigen
- Dichte der Luft muss auf die gültige Höhe über dem Meeresniveau und auf die herrschende Lufttemperatur umgerechnet werden.
- Ergebnisse:
 - Größenordnung des c_w -Wertes des Autos korrekt in der Größenordnung zwischen 0,30 und 0,40
 - Beim Nachschlagen wichtig, den genauen Fahrzeugtyp zu kennen (größere Unterschiede in Baureihen)
 - Rollreibung lag bei den verwendeten Autos im Bereich zwischen 100 N und 200 N.

5. Fazit

- GPS für unterrichtliche Zwecke interessante Technologie
- vielfältige Möglichkeiten
 - bei der Speziellen Relativitätstheorie
 - Verwendung von Handempfängern als Blackboxmessgeräte
 - größerer Messbereich für Bewegungen erschlossen
 - Möglichkeiten für fächerübergreifende Projekte

6. Literatur

- Vortrag: Zeitschriftenartikel
BRAUN, M.; WILHELM, T.:
„Das GPS-System im Unterricht“
In: Praxis der Naturwissenschaften – Physik in der Schule
57, Nr. 4, 2008, S. 20 - 27

- Ausführlichere Infos: Staatsexamensarbeit
Matthias Braun
„Das GPS-System im Physikunterricht“
<http://www.physik.uni-wuerzburg.de/~wilhelm/arbeiten/GPS.htm>
<http://www.physik.uni-wuerzburg.de/~wilhelm/arbeiten/ZulaGPS.pdf>

6. Literatur

- Kurz: Alle Infos und Software unter:

www.thomas-wilhelm.net/GPS.htm