

# Der Bierschaumzerfall

Thomas Wilhelm

Lehrstuhl für Physik und ihre Didaktik  
Universität Würzburg

# 1. Motivation

- Im Physikunterricht als Analogversuch zum radioaktiven Zerfall verwendet.
- Im Mathematikunterricht bei der Einführung der Exponentialfunktion verwendet.
- Vorteile:
  - Für viele Schüler dieses Alters interessant, aus dem Alltag bekannt, sehr einfach durchführbar, zu Hause wiederholbar.
  - Volumen der unzerfallenen Bierschaumbläschen gut sichtbar.
  - Scheinbar einleuchtend (aber nicht richtig), dass die Anzahl der Bläschenzerfälle pro Zeiteinheit proportional zur Anzahl vorhandener Bläschen ist:  $\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N$
- Messwerte weichen vom erwarteten Verlauf ab:

$$h(t) = h_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = h_0 \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{bzw.} \quad h(t) = h_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = h_0 \cdot e^{-\ln 2 \cdot t / T}$$

## 2.1 Der Bierschaum

---

- Flüssiger Schaum: gasförmigen CO<sub>2</sub>-Bläschen, die von flüssigen Wänden (elastische Hülle) eingeschlossen sind.
- Durch die mechanische Arbeit des Einschenkens wird die Entbindung von CO<sub>2</sub> begünstigt.
- Oberflächenaktive Substanzen (Tenside) wie Eiweißabbauprodukte und Hopfenbitterstoffe haben geringere Oberflächenspannung und bilden die Hülle.
- Bereits viele Forschungsarbeiten vorliegend
- Schaumbildung abhängig von Temperatur des Bieres, der Temperatur des Gefäßes, dem Alter des Bieres, der Wartezeit nach dem Öffnen der Flasche, dem Luftdruck und vor allem von der Art der Schaumerzeugung.
- Schaummaximum bereits einige Sekunden nach dem Einschenken erreicht.

## 2.1 Der Bierschaum

---

- Zerfall abhängig von Form des Gefäßes und Verunreinigungen an der Glaswand.
- Drei Zerfallseffekte:
  - Nach unten Fließen der Flüssigkeit aufgrund der Schwerkraft  
⇒ dünnere Wände der Bläschen ⇒ Zerplatzen (Entwässerung des Schaums, Drainage)
  - Zunahme der mittleren Blasengröße, da Kohlendioxid von kleineren in größere Blasen diffundiert ⇒ kleine Blasen verschwinden, große platzen
  - Verdunstung am oberen Ende des Schaums

## 2.2 Monoexponentielle Ergebnisse?

---

- Didaktische Beiträge behaupten: Abnahme des Bierschaumvolumens gut durch exponentiellen Zerfalls beschreibbar
- Unterschiede im Detail:
  - vorsichtiges Einfüllen / aus geringer Höhe / aus halben Meter
  - Messzylinder / breites Trinkglas
  - Höhenmessung / Widerstandsmessung
  - mit / ohne Löcher im Boden
- Genauere Untersuchungen von Prof. Leike: Mit  $\chi^2$ -Tests gezeigt, dass eine lineare Zerfallskurve den Messwerten weniger entspricht als e-Funktion.
- Bei den Diagrammen aller Autoren: Bierschaum zerfällt am Anfang schneller (mit einer kleineren Halbwertszeit) und nach längerer Messzeit langsamer (mit einer größeren Halbwertszeit).

## 2.3 Mehrphasige Ergebnisse

---

- Dale et al.: Künstliches Aufschäumen (Messung: Leitfähigkeit und Masse). Sie fanden drei unterschiedliche Zerfallsphasen:
  - 1. schnelle exponentiellen Abfall der Schaummasse durch Drainage des Bieres ( $t < 360\text{s}$ )
  - 2. langsamere exponentielle Abnahme der Schaummasse ( $360\text{s} < t < 1000\text{s}$ )
  - 3. nicht-exponentielle Schlussphase ( $1000\text{s} < t < 2000\text{s}$ )
- Plath und Sauerbrei: Ultraschallaufschäumverfahren
  - 1. Exponentieller Zerfall durch nach unten Fließen der Flüssigkeit ( $t < 160\text{ s}$ )
  - 2. Apollonischen Umordnung:  $V = V_0 \cdot e^{-k \cdot t^{2.5}}$
- Lebensmitteltechnologie Anaya verwendet Videoanalysesoftware: Seine Messkurven zeigen auch zwei Phasen, d.h. einen Knick in der Zerfallskurve.

## 2.4 Die Zerfallsphasen

---

- Messungen beginnen meistens frühestens ab dem Zeitpunkt der höchsten oberen Schaumgrenze.
- Alle Untersuchungen zeigen zwei Zerfallsphasen (unterschiedliche Zerfallsgleichungen):
  - In ersten Phase überwiegt das nach unten Fließen der Flüssigkeit aufgrund der Schwerkraft (Bierrückholungsphase)
  - In zweiten Phase überwiegt die Blasenvergrößerung und das Platzen der Blasen.

# 3. Modellbildung

---

- Theyßen: Differentialgleichungen nicht analytisch lösbar! Keine Funktion damit theoretisch begründbar!
- Theyßen: Bei trockenen Schäumen führt die Drainage in sehr grober Näherung zu hyperbolischen Zerfall. Aber hier nasser Schaum!
- Wie aus experimenteller Sicht die Messwerte am Besten mathematisch beschreiben?
- Leike mit  $\chi^2$ -Tests: e-Funktion besser als lineare Funktionen. Dafür ersten Ig-Nobelpreis der Harvard-Universität für unnütze oder skurrile wissenschaftliche Arbeiten.
- Theyßen zeigt nur in einer graphischen Darstellung, dass Exponentialfunktion und eine hyperbolische Funktion ähnlich gut zu den Messwerten von Leike passen.
- Plath und Sauerbrei haben von einer Software 2.500 Funktionsansätze untersuchen lassen und kamen so auf die komplizierte Gleichung, die im Exponenten der e-Funktion  $t^{2,5}$  hat.



# 3. Modellbildung

- Ziel: Gleichung, die nicht nur die Messergebnisse am Besten beschreibt, sondern die möglichst einfach und interpretierbar ist .
- Berechnung mit gemittelten Messdaten von Leike für Erdinger Weisbier

- Methode der kleinsten Quadrate: 
$$\chi^2 = \sum \frac{(h_{Experiment} - h_{Theorie})^2}{(\sigma_{Experiment})^2}$$

wird durch Anpassung der Modellparameter minimiert.

	Freiheitsgrade	$\chi^2$	$\chi^2_{reduced}$	Bemerkung
Linear	13	110,11	8,47	eine extrem schlechte Näherung
exponentiell; $\tau$ bestimmt, $h_0$ fest	13	10,29	0,791	die Anpassung von Leike

# 3. Modellbildung

---

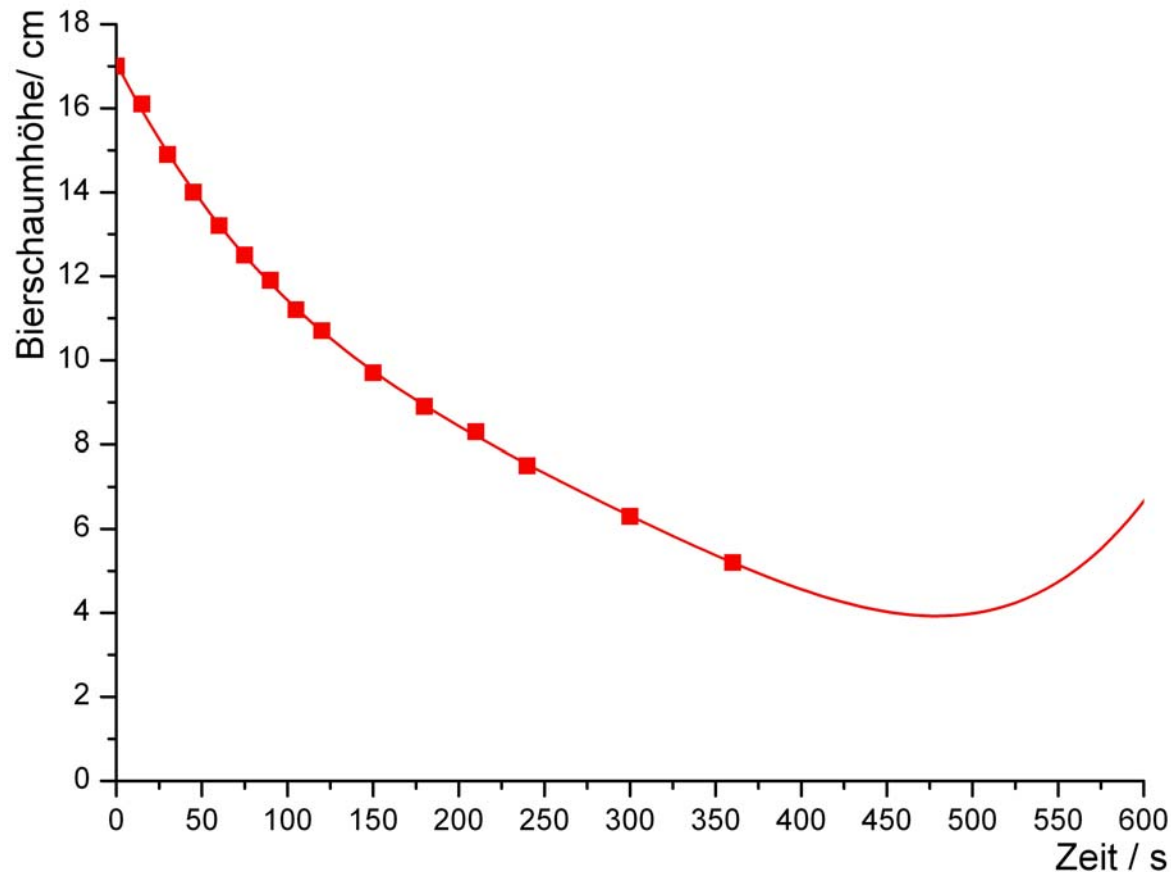
- Hyperbolischen Funktion (Theyßen): besseres  $\chi^2$  !
- Aber: Vor dem Messbereich eine physikalisch nicht interpretierbare Polstelle!
  
- Weitere Annahme eines exponentieller Zerfall mit einer Resthöhe  $h_\infty$  ergibt noch bessere Anpassung.
- Aber: verbleibende Restbierschaumhöhe nicht plausibel.
  
- Weitere unphysikalische Modellvorstellungen: Polynomfit  
Für ein Polynom vierter Ordnung ergibt sich perfekte Anpassung an die Messwerte!!
- Aber: völlig sinnloser Verlauf außerhalb des Messbereichs und Koeffizienten nicht physikalisch interpretierbar.

# 3. Modellbildung

	Freiheitsgrade	$\chi^2$	$\chi^2_{\text{reduced}}$	Bemerkung
Linear	13	110,11	8,47	eine extrem schlechte Näherung
exponentiell; $\tau$ bestimmt, $h_0$ fest	13	10,29	0,791	die Anpassung von Leike
Hyperbolische Funktion; $h_0, t_0$ bestimmt	13	5,47	0,421	die Anpassung von Theyßen: besser als Leike, aber unphysikalisch, da eine Singularität im Verlauf
exponentiell mit Resthöhe $h_\infty$ ; $\tau, h_0, h_\infty$ bestimmt	12	2,10	0,175	eine noch bessere Anpassung, aber unphysikalisch, da eine Resthöhe nicht beobachtet wird
Polynom 2. Grades	12	7,94	0,662	Die Anpassung wird zunehmend besser. Es ergeben sich hier aber sinnlose Verläufe außerhalb der Messpunkte. Darüber hinaus haben die Koeffizienten keine physikalische Bedeutung.
Polynom 3. Grades	11	0,613	0,0558	
Polynom 4. Grades	10	0,570	0,0518	
Polynom 5. Grades	9	0,446	0,0496	
Polynom 6. Grades	8	0,412	0,0515	
Polynom 7. Grades	7	0,356	0,0508	
Polynom 8. Grades	6	0,0908	0,0151	

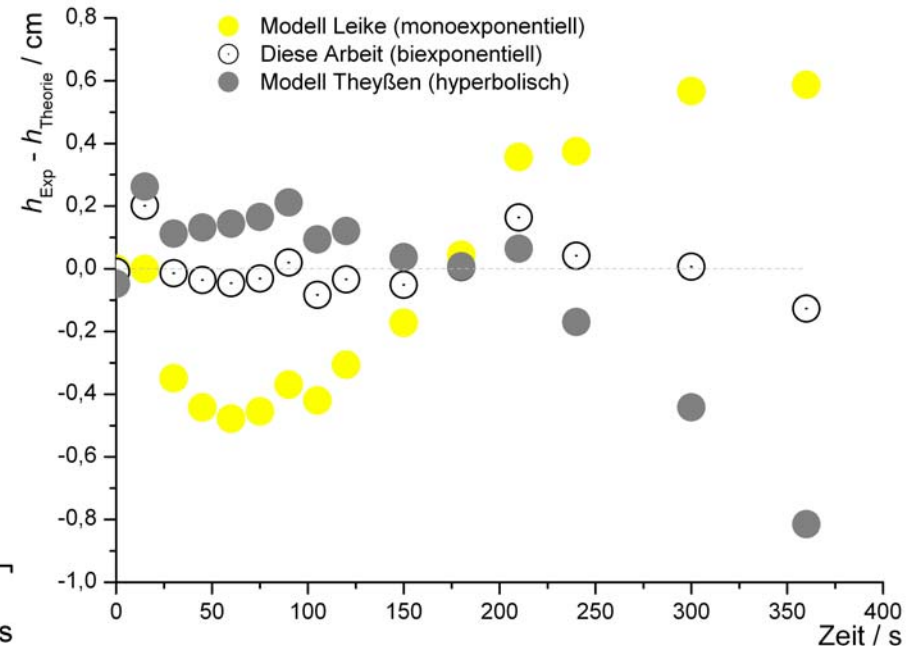
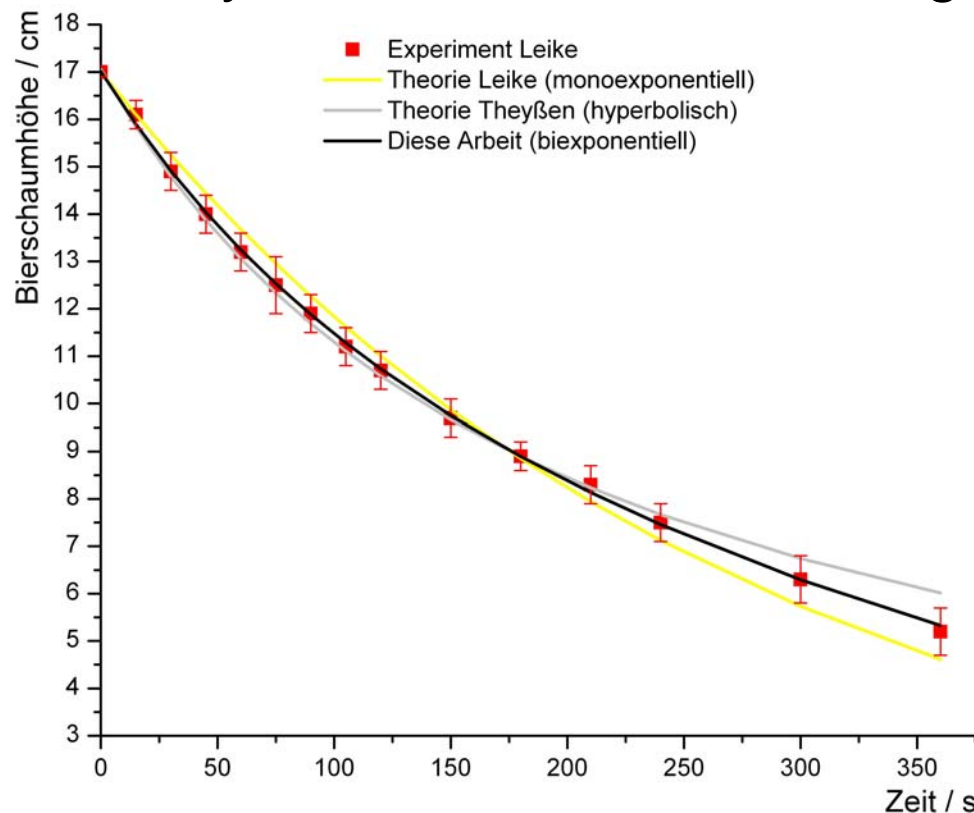
# 3. Modellbildung

- Eine sehr gute, aber sinnlose Anpassung mit einem Polynom vierter Ordnung:



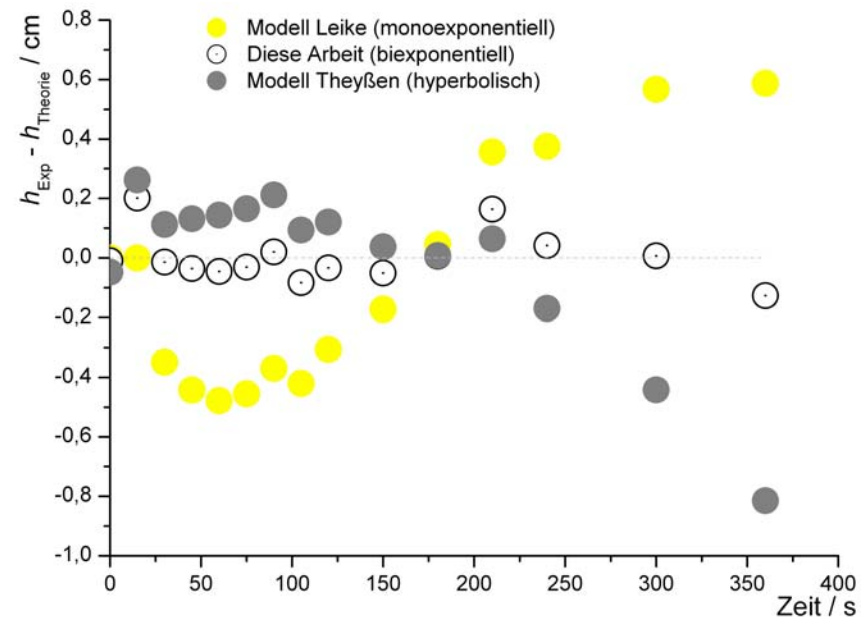
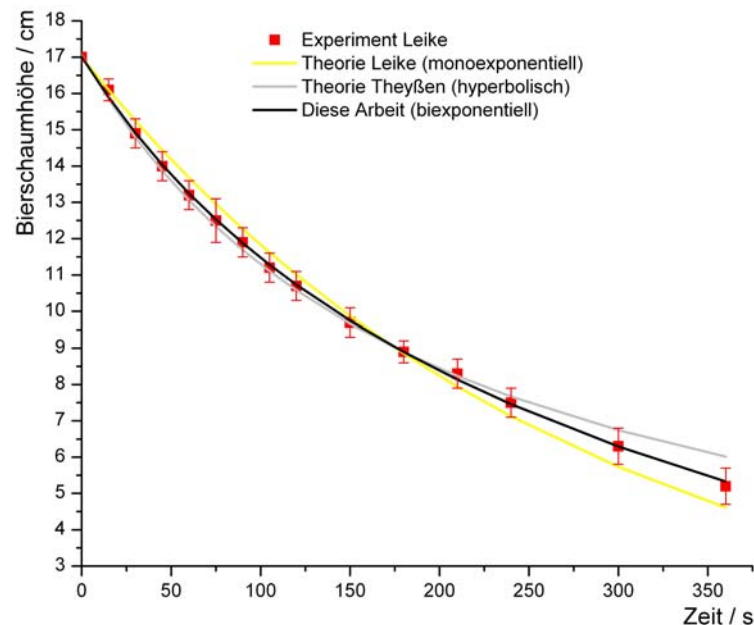
# 3. Modellbildung

- Weitere Wichtige Forderung: ermittelten Residuen  $h_{\text{Experiment}} - h_{\text{Theorie}}$  streuen gleichmäßig um die Nulllinie
- Bei e-Funktion und hyperbolischer Funktion: Systematische Abweichungen



# 2. Modellbildung

- Überlegung:
  - Die Zerfallskurven von Bierschaum weisen meist zwei Abschnitte auf
  - logarithmische Auftragung der Messwerte ergibt je linearen Verlauf
- Deshalb Modellierung mittels biexponentiellen Zerfalls:  $h(t) = h_1 \cdot e^{-t/\tau_1} + h_2 \cdot e^{-t/\tau_2}$
- Ergibt perfekte Anpassung an die Messwerte von Leike und zufällige, Abweichungen der Residuen
- Gleichung gut interpretierbar!



## 4. Messung mit der Videoanalyse

---

- Berührungslose, störungsfreie und genaue Messung der Schaumhöhe
- Videoanalysesoftware „measure Dynamics“:  
Schrittweite einstellen, um nur jedes x-te Bild des Videos zu zeigen
  - Beim Ablauf Zeitraffereffekt für qualitativen Eindruck
  - Erhebliche Arbeitserleichterung beim Ortanklicken:
    - neun Minuten Video mit 25 Bilder pro Sekunde ergibt 14.000 Bilder oder 28.000 Mausklicks (je Ober- und Unterkante des Schaums)  
Bei Verwendung jedes 100-ten Bildes nur 280 notwendigen Mausklicks



## 4. Messung mit der Videoanalyse

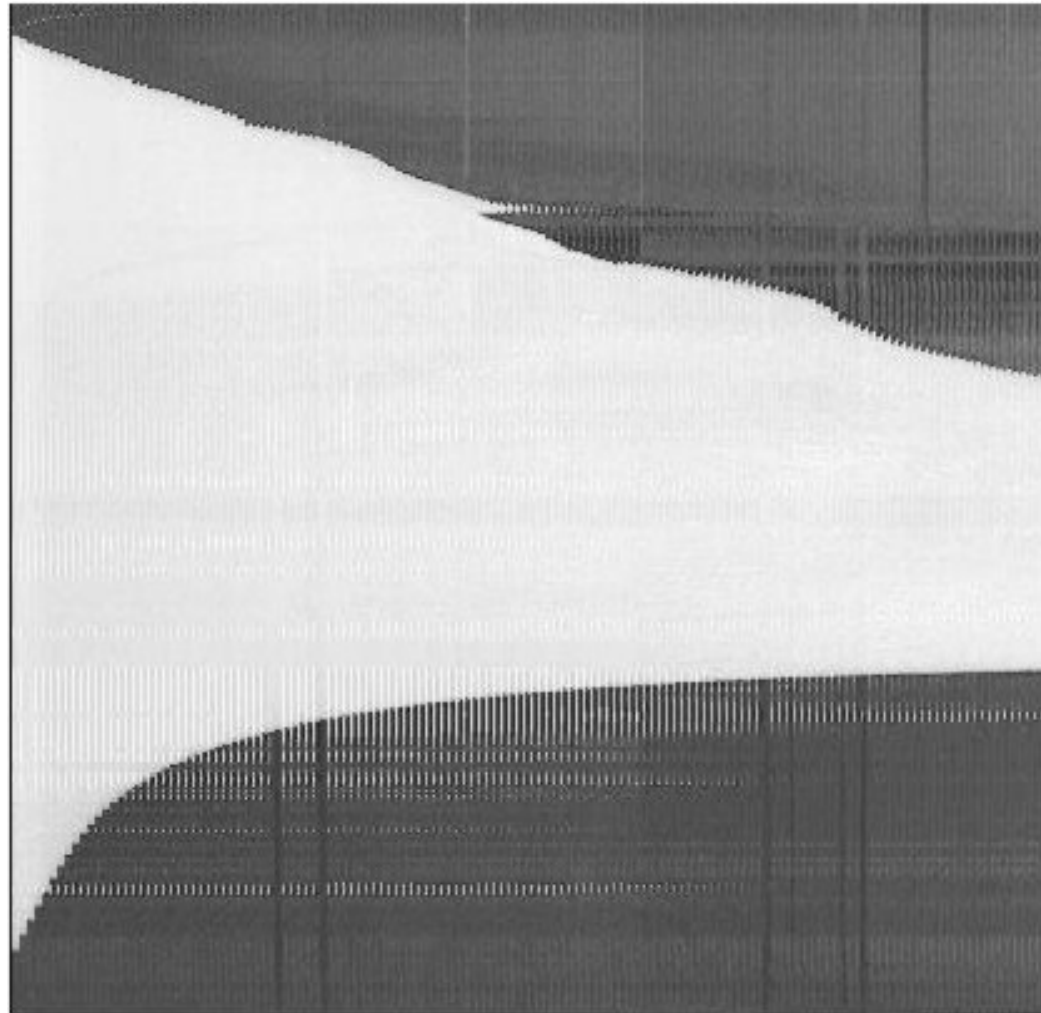
- Messung mit Videoanalyse:





## 4. Messung mit der Videoanalyse

- Weitere Möglichkeit in measure Dynamics:  
ein Streifenbild



## 4.2 Rahmenbedingungen

- Videobedingungen:
  - schwarzer matter Hintergrund und indirekt beleuchtet
  - Keine hellen Fenster
  - Glattes Glasgefäß
  - Videokamera in die Höhe der Mitte des Schaums und ein größerer Abstand mit Teleobjektiv
- Fettrückstände sowie Spülmittel beeinträchtigen also die Schaumbildung und –erhaltung (hier: Spülmaschine und anschließendes Ausspülen mit klarem Wasser und Lufttrocknen) → Experiment
- fettes Glas
  - Vorteil: kein Schaum bleibt am Glas hängen
  - Nachteil: viel schnellerer Zerfall



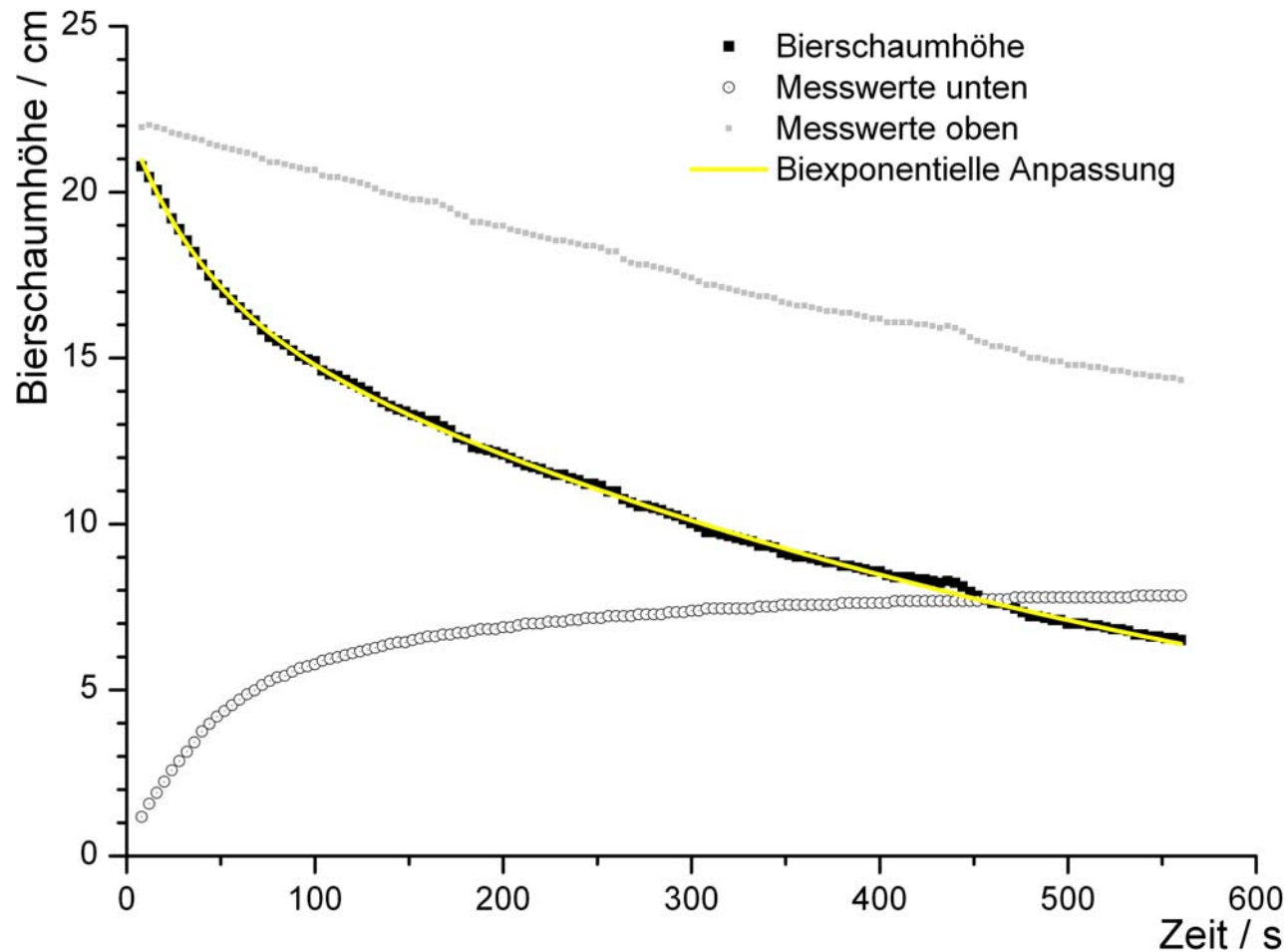
## 4.3 Messergebnisse

---

- Videoanalysen mit verschiedenem Bier und verschiedenen Bedingungen ergaben fast immer Zerfallskurven mit deutlich zwei Phasen
- Für Vergleich Messung wie bei Leike:
  - Erdinger Weißbier (8°C)
  - Gefäß mit 7,2 cm Durchmesser (Innenhöhe 28 cm)
  - Bier aus ca. 30 cm fallen gelassen
- Aber längere Messzeit (560 s statt 360 s).

## 4.3 Messergebnisse

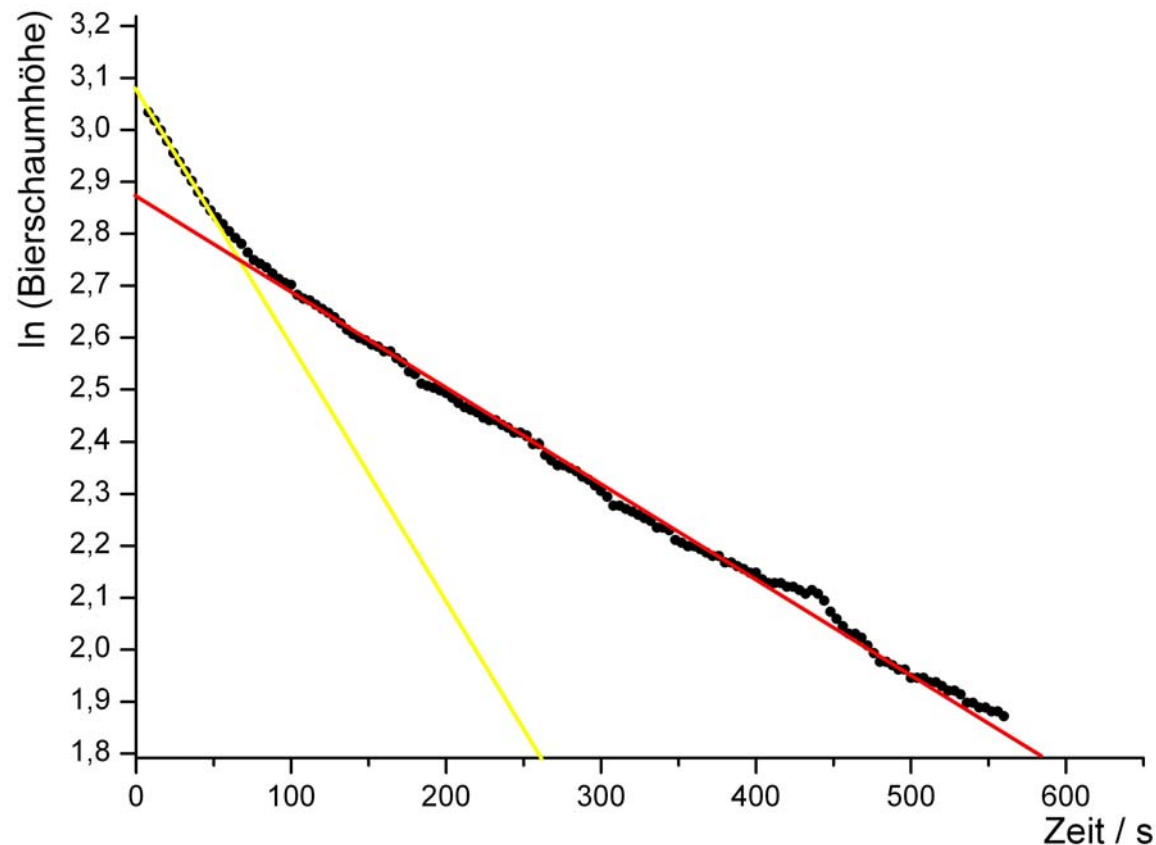
- Ergebnis als Diagramm:



## 4.3 Messergebnisse

- Gute mathematische Beschreibung ( $\chi^2$ -Test):  
biexponentiell  $h(t) = h_1 \cdot e^{-\ln 2 \cdot t/T_1} + h_2 \cdot e^{-\ln 2 \cdot t/T_2}$
- Logarithmische Darstellung:

$$\begin{aligned} h_1 &= 4,9 \text{ cm}, \\ T_1 &= 29 \text{ s}, \\ h_2 &= 17,1 \text{ cm}, \\ T_2 &= 399 \text{ s} \end{aligned}$$



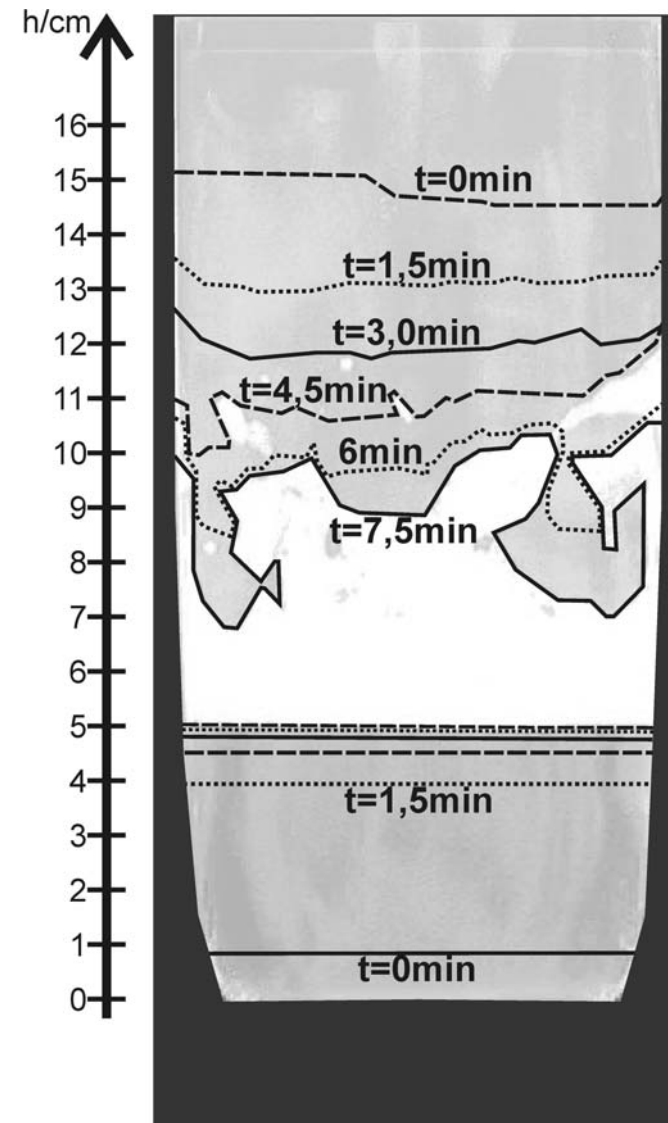
## 4.4 Kritischer Rückblick

- Bierschaumentstehung und Bierschaumzerfall abhängig von vielen Variablen, die man nur schwer kontrollieren kann (unzureichend reproduzierbar).
- Videoanalyse vermitteln den falschen Eindruck eines kleinen Messfehlers.
- Aber:
  - Bierschaum steht am Rand unterschiedlich hoch (subjektive Mittelung)
  - Schaum am Rand kann einige Zentimeter höher als im Inneren sein
  - Gegen Ende der Messung selbst im Inneren des Glases Unterschiede von mehreren Zentimetern



## 4.4 Kritischer Rückblick

- Hier: In „measure Dynamics“ Bilder als Bilderserie exportiert, dann Schaumgrenzen im Graphikprogramm nachgezeichnet.
- Also: Hier durchgeführte Diskussion um die richtige Modellierung ist übertrieben.





## 5. Fazit

---

- Theoretisch keine Zerfallsgleichung bestimmbar und experimentell keine allgemeingültige Gleichung beweisbar
- Exponentialfunktion ist eine didaktisch sinnvolle Elementarisierung
  - Bei den großen Messfehlern auf den ersten Blick einigermaßen passend
  - Vor allem, wenn man nur eine Phase misst
  - bei guter Messung meist Zerfallskurven, die zwei Phasen haben.
- Biexponentieller Verlauf ist eine Elementarisierung, die den Messwerten besser entspricht und besser theoretisch mit den zwei Phänomenen Drainage und Blasenvergrößerung begründbar ist.
- Bierschaumzerfall ist als Analogon des radioaktiven Zerfalls problematisch.
- Bierschaumzerfall möglich in Seminararbeiten oder „Jugend forscht“: Welches Bier zerfällt wie unter welchen Bedingungen
- Bierschaumzerfall geeignet für Universität, um über Modellierung, Fehleranalyse und Kurvenanpassung zu reden.